

Мат. модели в экономике.

Литература.

- ① Михайлов А. - "Выпуклые структуры и мат. экономика"
- ② Ашманов С. А. - "Введение в мат. экономику"
- ③ Якланд. И. - "Элементы мат. экономики"
- ④ Обен М. А. - "Матем. анализ и его эконом. приложения"
- ⑤ Воробьева Н. Г., Мамонин А. А. -
- "Эконом. интерпретация двойственности
задач мин. прогр-ии."
- ⑥ Рассоха А. В., Мамонин А. А.
"Элементы финансовой экономики"

Глава 1. Модели

многоотраслевого баланса
и теория неотриц. матриц.

§1 Модель многоотраслевого
баланса В. В. Леонтьева.

и отрасли

$$n = 18, 96$$

$$10 - 26, 126, 59$$

$$\text{США: } n = 100, 300$$

$X_i(t)$ - объем произв-ва i -ой отрасли в период времени t . ($t=1$ год, считая с 1957)

$Z_{ij}(t)$ - кол-во продукции i -ой отрасли, которая затрачивается в процессе пр-ва

j -ой отрасли в период времени t .

$\{X_i(t), Z_{ij}(t) \mid i, j = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T\}$ - временной ряд

$$\boxed{\frac{Z_{ij}(t)}{X_j(t)} \approx a_{ij}} \text{ - основная гипотеза}$$

$A = \| a_{ij} \|_{i,j=1,\dots,n}$ - матрица прямых затрат
↑
коэф. матр.
Леонтьева

$$A \geq 0 \Leftrightarrow a_{ij} \geq 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 \Leftrightarrow x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\vec{x} > 0 \Leftrightarrow x_j > 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$A > 0 \Leftrightarrow a_{ij} > 0 \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0$$

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^n Z_{ij}(t) + \omega_i(t)$$

$\omega_i(t)$ - конечное потребление i -ой отрасли в пер. времени t . $i=1, n$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq 0$ - вектор объёмов произв-ва

x_j - объём произв-ва j -ой отрасли

$\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \geq 0$ - вектор конечного потребле-
ния.

$$\begin{cases} \vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega} \\ \vec{x} \geq 0, \vec{\omega} \geq 0 \end{cases}$$

статическая
модель
Леонтьева

$$D = E - A.$$

Опр. 1 Будем говорить, что матрица $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n}$ ≥ 0 и $j=1, n$ продуктивна, если $\exists \vec{x} \geq 0, \vec{\omega} > 0$:

$$\vec{x} - A\vec{x} = \vec{\omega}.$$

Простейшая динам. модель Леонтьева!

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = A\vec{x}(t+1) + \vec{\omega}(t+1) \\ \vec{x}(t) \geq 0, \vec{\omega}(t) > 0, t=1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{x}(t) &= s^t \hat{\vec{x}}, \hat{\vec{x}} > 0 \\ \vec{\omega}(t) &= s^t \hat{\vec{\omega}}, \hat{\vec{\omega}} > 0 \end{aligned} \right\} \text{решим сбалансированного роста}$$

$s > 0$ - темп роста

$$s^t \hat{\vec{x}} = s^{t+1} A \hat{\vec{x}} + s^{t+1} \hat{\vec{\omega}} \quad / \quad s^{t+1}$$

$$\boxed{\frac{1}{s} \hat{\vec{x}} = A \hat{\vec{x}} + \hat{\vec{\omega}}, \hat{\vec{x}} \geq 0, \hat{\vec{\omega}} > 0}$$

$$D = I E - A$$

$$D = \|d_{ij}\|_{i,j=1..n}, \quad d_{ij} \leq 0 \text{ при } i \neq j$$

Воп. 1' Будем говорить, что матрица D :

$$d_{ij} \leq 0, \text{ при } i \neq j \quad (1)$$

является продуктивной, если $\exists \bar{x} \geq 0, \bar{w} > 0$:

$$D\bar{x} = \bar{w}$$

§2 Продуктивные матрицы

$$[71] \quad D: d_{ij} \leq 0 \text{ при } i \neq j \quad (1)$$

Тогда следующие утверждения экв-мы:

$$1) \exists \bar{x} \geq 0, \bar{w} > 0 : D\bar{x} = \bar{w}$$

$$2) \forall \bar{w} \geq 0 \exists \bar{x} \geq 0 : D\bar{x} = \bar{w}$$

Р. 5 если A - непродукт. $\Rightarrow \exists$ экономика
 $\exists A$ - продукт. $\Rightarrow \exists$ экономика

3) условия Хоккинса - Саймона

$\Leftrightarrow$ отсутствие нулевых производственных контуров
 в модели межотрасл. баланса.

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{k1} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} > 0, \quad k = \overline{1, n}$$

$$4) \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$$

(все главные миноры 2-го порядка) $4) \Rightarrow 3)$

$$\det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & \dots & d_{i_1 i_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_k i_1} & \dots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

Доказ: (Лемма 1) $1) \Rightarrow 3)$ (индукция по (n))

$$(n=1) \quad \exists x_1 \geq 0, \omega_1 > 0 \quad d_{11} x_1 = \omega_1 \Rightarrow d_{11} > 0$$

$$\exists x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \omega_1 > 0, \dots, \omega_n > 0$$

$$(2) \quad \begin{cases} d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + \dots + d_{1n} x_n = \omega_1 \\ d_{21} x_1 + d_{22} x_2 + \dots + d_{2n} x_n = \omega_2 \\ \vdots \\ d_{n1} x_1 + d_{n2} x_2 + \dots + d_{nn} x_n = \omega_n \end{cases}$$

$$d_{11} x_1 = \overset{1^0}{\omega_1} - \overset{\leq 0}{d_{12} x_2} - \dots - \overset{\leq 0}{d_{1n} x_n} > 0 \Rightarrow d_{11} > 0$$

Матрица метода Якоби:

$$(2'') \quad (3) \quad \begin{cases} d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + \dots + d_{1n} x_n = \omega_1 \\ \hat{d}_{12} x_2 + \dots + \hat{d}_{1n} x_n = \hat{\omega}_1 \\ \vdots \\ \hat{d}_{n2} x_2 + \dots + \hat{d}_{nn} x_n = \hat{\omega}_n \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} \hat{d}_{ij} = \overset{\leq 0}{d_{ij}} - \overset{\leq 0}{d_{ij}} \frac{\overset{\leq 0}{d_{i1}}}{\overset{> 0}{d_{11}}} & (i, j = 2, \dots, n) \\ \hat{\omega}_i = \overset{1^0}{\omega_i} - \omega_1 \frac{\overset{\leq 0}{d_{i1}}}{\overset{> 0}{d_{11}}} & (i = 2, \dots, n) \end{cases}$$

$$\hat{D} = \|\hat{d}_{ij}\|_{i,j=2,\dots,n}$$

$$\hat{d}_{ij} \leq 0, \text{ jika } i \neq j$$

$$\hat{w}_i > 0$$

Ho ungguksan

$$\begin{vmatrix} \hat{d}_{11} & \dots & \hat{d}_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{d}_{k1} & \dots & \hat{d}_{kk} \end{vmatrix} > 0, K=1, n \quad (5)$$

$$\det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \dots & d_{kk} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1k} \\ 0 & \hat{d}_{22} & \dots & \hat{d}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \hat{d}_{k2} & \dots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= d_{11} \det \begin{pmatrix} \hat{d}_{22} & \dots & \hat{d}_{2k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{d}_{k2} & \dots & \hat{d}_{kk} \end{pmatrix}$$

Mat 2 3) $\Rightarrow$ 2) (ungguksan no n)

$(n=1)$ $d_{11} > 0, \forall w_1 \geq 0 \exists x_1 = \frac{w_1}{d_{11}} \geq 0$

$\forall w_1 \geq 0, \dots, w_n \geq 0$

$$\begin{cases} d_{11} x_1 + d_{12} x_2 + \dots + d_{1n} x_n = w_1 \\ d_{21} x_1 + \dots + d_{2n} x_n = w_2 \\ \vdots \\ d_{n1} x_1 + d_{n2} x_2 + \dots + d_{nn} x_n = w_n \end{cases}$$

$\exists ? x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$

$d_{11} > 0$ (аналогично (2'), (4)) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (5)

А индукцией $\exists x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ удовл (3)

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{d_{11}} (b_1 - d_{12} x_2 - \dots - d_{1n} x_n) \geq 0$$

Шаг 3 2) $\Rightarrow$ 1) - очевидно

Итого: 1) $\xLeftrightarrow[\text{мат. 1}]$ 3) $\xLeftrightarrow[\text{мат. 2}]$ 2) $\xRightarrow{\text{очев.}}$ 1

Шаг 4: 4) $\Rightarrow$ 3) - очевидно.

Нужно показать, что

$$\det \begin{pmatrix} d_{i_1 i_1} & d_{i_1 i_2} & \dots & d_{i_1 i_k} \\ d_{i_2 i_1} & d_{i_2 i_2} & \dots & d_{i_2 i_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{i_k i_1} & d_{i_k i_2} & \dots & d_{i_k i_k} \end{pmatrix} > 0$$

Рассм. перестановку:

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k, \dots \\ i_1, i_2, \dots, i_k, \dots \end{pmatrix}$$

$$E_H = \begin{pmatrix} 0, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0 \\ \vdots \\ 0, \dots, 0, \dots, 1, \dots, 0 \end{pmatrix}$$

$$E_H \vec{x} = \vec{x}_H$$

$$\vec{x} \geq 0 \Leftrightarrow \vec{x}_H \geq 0$$

$$E_H \vec{w} = \vec{w}_H$$

$$\vec{w} \geq 0 \Leftrightarrow \vec{w}_H \geq 0$$

$$E_H D E_H^* = D_H$$

D удовл. (1) $\Leftrightarrow$

D_H удовл. (1)

$$E_H^* E_H = E$$

$$2) := \forall \vec{w} \geq 0 \quad \exists \vec{x} \geq 0 \quad D\vec{x} = \vec{w} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E_* D\vec{x} = E_* \vec{w} \Leftrightarrow \underbrace{E_* D E_*^*}_{D_*} \underbrace{E_* \vec{x}}_{\vec{x}_*} = \underbrace{E_* \vec{w}}_{\vec{w}_*}$$

$$2)_* \quad \forall \vec{w}_* \geq 0 \quad \exists \vec{x}_* \geq 0: D_* \vec{x}_* = \vec{w}_* \quad (= \text{y.g. } 1)_* \\ \Rightarrow 2)_* \Rightarrow 3)_* \quad \text{3)}_*=1 \quad 4)_* \Rightarrow$$

Пример: $D = E - A$

$$(n=1) \quad x_1 = a_{11} x_1 + c_1 \quad a_{11} < 1, \quad d_{11} = 1 - a_{11} > 0$$

или задаёмся больше, чем произведено $\Rightarrow$
нагрузка на "продуктивность" материалоемкость

$$(n=2) \quad \begin{cases} x_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + c_1 \\ x_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + c_2 \end{cases}$$

Какие условия на A , чтобы "Э продуктивность"

$$a_{11} < 1, a_{22} < 1 \Leftrightarrow d_{ii} > 0$$

субытожный производственный контур

$$x_2 = \frac{1}{1-a_{22}} (w_2 + a_{21} x_1)$$

$$x_1 = \left(a_{11} + \frac{a_{12} a_{21}}{1-a_{22}} \right) x_1 + w_1 + \frac{1}{1-a_{22}} w_2$$

если $< 1 \Rightarrow \exists$ для производства

конечную продукцию

$$a_{11} + \frac{a_{12} a_{21}}{1-a_{22}} < 1$$

$$\frac{(1-a_{11})(1-a_{22}) - a_{12}a_{21}}{(1-a_{22})} > 0 \quad D = \begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{pmatrix}$$

✓ Проверка матрицы прямых затрат.

Выводим это.

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$ - вектор цен

$$A_i = p_i - \sum_{j=1}^n p_j a_{ji} \quad i = \overline{1, n}$$

д.б.в. стоимость затраты на произв-во j-ого продукта

$$A = (A_1, \dots, A_n)$$

$$\vec{x} = \vec{p} - A^* \vec{p}$$

В СССР нужно было: $\exists \vec{p} \geq 0, \vec{x} > 0$:

$$\vec{p} - A^* \vec{p} = \vec{x} \quad (\text{Связь ли это с произв. matr. - да})$$

Лемма $\exists D = \|d_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}}$ удовлетв. $d_{ij} \leq 0$

при $i \neq j$ (1). Тогда след. утв.-я эквивалентны.

1) $\exists \vec{x} \geq 0, \vec{w} > 0 : D\vec{x} = \vec{w}$;

2) $\forall \vec{w} \geq 0, \exists \vec{x} \geq 0 : D\vec{x} = \vec{w}$;

3) все последовательные главные миноры $D > 0$.

4) все главные миноры $D > 0$

5) $\exists \vec{p} \geq 0, \vec{x} > 0 : D^* \vec{p} = \vec{x}$;

$$6) \forall \vec{f} \geq 0 \quad \exists \vec{p} \geq 0 : D^* \vec{p} = \vec{f};$$

7) все последовательные главные миноры $D^* > 0$.

8) все главные миноры $D^* > 0$

$$9) \exists D^{-1} \geq 0.$$

D-во: 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3) $\Leftrightarrow$ 4) (th1 для D)

5) $\Leftrightarrow$ 6) $\Leftrightarrow$ 7) $\Leftrightarrow$ 8) (th1 для D^*)

$$9) \Rightarrow D \vec{x} = \vec{w} \Rightarrow \vec{x} = D^{-1} \vec{w}$$

$$\vec{w} \geq 0 \Rightarrow \vec{x} \geq 0, \text{ т.е. } 9) \Rightarrow 2)$$

$$3) \Rightarrow \det(D) > 0 \Rightarrow \exists D^{-1}$$

$$2) \vec{w} = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \exists \vec{x} = D^{-1} \vec{e}_i \Rightarrow$$

$$D^{-1} \geq 0.$$

$$A \geq 0 \quad (E - A)^{-1}$$

$$(k=1) \quad \frac{1}{1 - a_{11}} = 1 + a_{11} + a_{11}^2 + \dots$$

Усл. продуктивности $\Rightarrow 0 \leq a_{11} < 1$

$$(E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \dots$$

$$\rho > 0 \Rightarrow \underbrace{(\rho E - A)^{-1}}_{\text{не вырождена}} = \frac{1}{\rho} (E - \frac{1}{\rho} A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k+1}} A^k$$

72 $\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$. Тогда

1) если $\exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0$, то $\rho > 0$, ряд

(7) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{k+1}} A^k$ с.с.с. и его сумма
равна $(\rho E - A)^{-1}$;

2) если $\rho > 0$ и ряд (7) с.с.с., то $\exists (\rho E - A)^{-1}$

До-во: 1) по теореме (9) $\Rightarrow$ 2))

$$\rho - a_{ii} > 0, a_{ii} \geq 0 \Rightarrow \rho > 0$$

$$T_S = \sum_{k=0}^S \frac{1}{\rho^{k+1}} A^k \geq 0$$

$$T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_S \leq T_{S+1} \leq \dots \text{ — монотонность}$$

Если $\rho E - A$ о.р.с. $\Rightarrow \rho E - A$ с.с.с.с.

Доказ-м в.м.м.с.с. г.с.с.:

$$(\rho E - A) T_S = T_S (\rho E - A) = E - \frac{1}{\rho^{S+1}} A^{S+1}$$

$$(\rho E - A) T_S = \sum_{k=0}^S \frac{1}{\rho^k} A^k - \sum_{k=0}^S \frac{1}{\rho^k} A^{k+1} = E - \frac{1}{\rho^{S+1}} A^{S+1}$$

$$T_S = (\rho E - A)^{-1} (\rho E - A) T_S = (\rho E - A)^{-1} \underbrace{\frac{1}{\rho^{S+1}} A^{S+1}}_{\underset{0}{\underbrace{\quad\quad\quad}}}$$

$$T_S \leq (\rho E - A)^{-1} \text{ не зависит от } S$$

Поскольку о.р.с. монот. посл-ть с.с.с., получаем,

$$\text{что } \exists \lim_{S \rightarrow +\infty} T_S = T \geq 0 \quad (9)$$

$$\rho (T_{S+1} - T_S) = \frac{1}{\rho^{S+1}} A^{S+1}, \quad \lim_{S \rightarrow +\infty} \frac{1}{\rho^{S+1}} A^{S+1} = 0 \quad (10)$$

$$(8), (9), (10) \Rightarrow (\rho E - A)T = T(\rho E - A) = E, \text{ где}$$

$$T = (\rho E - A)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Замечание: $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{c}$

$$\vec{x} = (E - A)^{-1} \vec{c} = \vec{c} + A\vec{c} + A^2\vec{c} + \dots + A^k\vec{c} + \dots$$

матр. полных делител.

судит. произв-ный контур, отсутствует, когда $\sigma(A) \subset \{1\}$

$A\vec{c}$ - сч-е на произв. в произведении $\vec{c}$

$A^2\vec{c}$ - " " " " $A\vec{c}$
и. т. д.

§3) Спектральные св-ва

неотрицательных матриц.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

Лемма 1

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0 \quad \text{и}$$

$$M(A) = \{\rho \mid \exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0\}.$$

Тогда $M(A) = (\kappa(A), +\infty)$, где $\kappa(A) \geq 0$.

Д-во: Мак 1. Покажем, что $M(A) \neq \emptyset$.

$$\vec{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) > 0,$$

$$\exists \hat{\rho} > \max_{1 \leq i \leq n} \frac{[A\vec{x}]_i}{\hat{x}_i}$$

$$\hat{p} \cdot \hat{x} > A \hat{x} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} (\hat{p}E - A) \text{ продуктивна} \\ \stackrel{T_1'}{\Rightarrow} \hat{p} \in M(A).$$

Лемма 2. Покажем, что если $y > p$, $p \in M(A)$,

$$\text{то } y \in M(A)$$

$$p \in M(A) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} (pE - A) \text{ неотрицательно обратима} \\ \Rightarrow T_1' \Rightarrow (pE - A) \text{ - продуктивна} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \exists \vec{x} \geq 0:$$

$$p\vec{x} > A\vec{x} \geq 0 \Rightarrow \vec{x} > 0.$$

$$y\vec{x} > p\vec{x} > A\vec{x} \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} (yE - A) \text{ продуктивна}$$

$$\Rightarrow T_1' \Rightarrow y \in M(A).$$

Лемма 3. Положим $\lambda(A) = \inf \{ p \mid \exists (pE - A)^{-1} \geq 0 \} \geq \{th\} \geq 0.$

$$M(A) = (\lambda(A), +\infty) \text{ или } M(A) = [\lambda(A), +\infty)$$

Покажем, что $\lambda(A) \notin M(A)$

$$\forall \lambda(A) \in M(A) \Rightarrow T_1' \Rightarrow (\lambda(A)E - A) \text{ про-} \\ \text{дуктивна, т.е. } \exists \vec{x} \geq 0: \lambda(A)\vec{x} > A\vec{x} \geq 0 \\ \Rightarrow \vec{x} > 0; \exists \varepsilon > 0: (\lambda(A) - \varepsilon)\vec{x} > A\vec{x} \\ \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} (\lambda(A) - \varepsilon)E - A \text{ - продуктивна} \Rightarrow T_1'$$

$(\lambda(A) - \varepsilon) \in M(A)$ - Противоречие

с определением $M(A)$. $\square$

Лемма 2 $\|A\| = \max_{j=1, \dots, n} \|a_j\| \geq 0$,

$\kappa(A) = \inf \{ \rho \mid \exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0 \}$. Тогда $\exists \bar{x}_A \geq 0$,
 $\bar{x}_A \neq 0 : A \bar{x}_A = \kappa(A) \bar{x}_A$

До-во: Шаг 1 Зафикси. $\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n) \geq 0$.

Покажем при $\rho > \kappa(A)$

$$\bar{y}(\rho) = (\rho E - A)^{-1} \bar{\omega} \geq 0$$

$$\rho \bar{y}(\rho) - A \bar{y}(\rho) = \bar{\omega} \quad (1)$$

Покажем, что если $\eta > \rho > \kappa(A)$, то $\bar{y}(\eta) \leq \bar{y}(\rho)$

$$\eta \bar{y}(\eta) - A \bar{y}(\eta) = \bar{\omega} \quad (1')$$

$$(1) - (1') \Rightarrow (\rho E - A)(\bar{y}(\rho) - \bar{y}(\eta)) - (\eta - \rho)\bar{y}(\eta) = 0$$

$$\bar{y}(\rho) - \bar{y}(\eta) = \underbrace{(\eta - \rho)}_{\geq 0} \underbrace{(\rho E - A)^{-1}}_{\geq 0} \underbrace{\bar{y}(\eta)}_{\geq 0} \geq 0$$

Шаг 2 Покажем при $\rho > \kappa(A)$

$$\sigma(\rho) = \sum_{j=1}^n [\bar{y}(\rho)]_j > 0$$

$\sigma(\rho)$ не возрастает на $(\kappa(A), +\infty)$

Покажем, что

$$\lim_{\rho \rightarrow \kappa(A)+0} \sigma(\rho) = +\infty \quad (2)$$

$$\neg (2) \Rightarrow \exists \hat{\sigma} < +\infty : \sigma(\rho) \leq \hat{\sigma} \text{ при } \rho > \kappa(A)$$

$$\Rightarrow [\bar{y}(\rho)]_j \leq \hat{\sigma} \text{ при } \rho > \kappa(A), j = \overline{1, n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\rho \rightarrow \lambda(A)+0} \vec{y}(\rho) = \vec{y} \geq 0$$

Переходя в (1) к пределу при $\rho \rightarrow \lambda(A)+0$,
получим $\lambda(A) \vec{y} - A \vec{y} = \vec{0} \geq 0$

$\Rightarrow (\lambda(A)E - A)$ вырожденная $\Rightarrow \det \Rightarrow$

$\lambda(A) \in M(A)$?! Противоречие с леммой 1.

Шаг 3 Положим, при $\rho > \lambda(A)$

$$\vec{x}(\rho) = \frac{1}{\sigma(\rho)} \vec{y}(\rho) \in K,$$

где $K = \{ \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \geq 0 \mid \sum_{j=1}^n x_j = 1 \}$ - симплекс.

$\{ \rho(t) \mid t=1, 2, \dots \} \downarrow \lambda(A)$

Выделим из $\{ \vec{x}(\rho(t)) \mid t=1, 2, \dots \} \subset K$ с.с.с.

послед-ть

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{x}(\rho(t)) = \vec{x}_A \in K$$

$$\vec{x}_A \geq 0, \quad \vec{x}_A \neq 0$$

При $\rho > \lambda(A)$ из (1) $\Rightarrow \rho \vec{x}(\rho) - A \vec{x}(\rho) =$

$$= \frac{1}{\sigma(\rho)} \cdot \vec{0} \quad (4)$$

Подставляя в (4) $\rho = \rho(t)$ и

переходя к пределу $t \rightarrow +\infty$, получаем

$$\lambda(A) \vec{x}_A - A \vec{x}_A = 0 \quad (\text{см } (2))$$

$$A \vec{x}_A = \lambda(A) \vec{x}_A.$$



7.3 (Фрабениус-Анрон)

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$. Тогда

1) среди собственных чисел $A \in$ неотр-не веществ. числа и наибольшему из них $\lambda(A)$ соответствует неотриц. с.в. $\vec{x}_A$.

$$2) \exists (pE - A)^{-1} \geq 0 \Leftrightarrow p > \lambda(A)$$

3) если $\vec{y} \geq 0, \vec{y} \neq 0, A\vec{y} \geq \mu\vec{y}$, то $\mu \leq \lambda(A)$

4) если $A\vec{z} = \omega\vec{z}, \vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, то $|\omega| \leq \lambda(A)$.

и $\lambda(A) < 1 \Rightarrow$ matr A - продукт.

До-во:

1) и 2) следуют из лемм 1 и 2, т.к. при $p > \lambda(A)$
 $p \in M(A) \Rightarrow \exists i' \Rightarrow \det(pE - A) > 0 \Rightarrow p > \lambda(A)$ не
явл. собственным числом A .

3) ПП, т.е. $\vec{y} \geq 0, \vec{y} \neq 0$

$$\mu\vec{y} \leq A\vec{y} \Leftrightarrow (\mu E - A)\vec{y} \leq 0$$

$$\mu > \lambda(A) \Rightarrow \exists (\mu E - A)^{-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \vec{y} = (\mu E - A)^{-1} (\mu E - A)\vec{y} \leq 0 \quad ?!$$

Противоречие.

4) Положим $y_j = |z_j|, z = (z_1, \dots, z_n), j = \overline{1, n}$

$$\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \geq 0, \vec{y} \neq 0$$

$$\omega z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j$$

$$|\omega z_i| = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right|$$

$$|\omega| y_i = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |a_{ij} z_j| = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$|\omega| \vec{y} \leq A \vec{y} \Rightarrow |\omega| \leq \lambda(A)$$



Опр. $\lambda(A) = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n} \geq 0$. Тогда

$\lambda(A) = \inf \{ \rho \mid \exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0 \}$ наим. числом
(корнем) Фробениуса-Перрона матр. A;

$\vec{x}_A \geq 0$ ($\vec{x}_A \neq 0, A \vec{x}_A = \lambda(A) \vec{x}_A$) наим.-сл
вектором Фробениуса-Перрона матр. A.

Замечание: s -темп сбалансированного
роста

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{s} \vec{x} = A \vec{x} + \vec{w} \\ \vec{x} \geq 0, \vec{w} > 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left(\frac{1}{s} E - A \right) \text{ прогн. matr.}$$

$$\text{th1,3} \quad \Leftrightarrow \frac{1}{s} > \lambda(A) \Leftrightarrow s < \frac{1}{\lambda(A)}$$

$\frac{1}{\lambda(A)}$ - технологическое ограничение
на темп сбалансированного роста

Лемма Гроувмана-Перрона

$\exists A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$. Тогда:

1) $\chi(A^*) = \chi(A)$

2) $\forall \alpha \geq 0 \quad \chi(\alpha A) = \alpha \cdot \chi(A)$

3) $\chi(A^t) = (\chi(A))^t$

4) если $A \geq B \geq 0$, то $\chi(A) \geq \chi(B)$

5) если C главная подматрица A ,
то $\chi(A) \geq \chi(C)$

6) $\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A^n = 0$

До-во:

3) по теореме $\exists \vec{x}_A \neq 0, \vec{x}_A \geq 0$

$$A \vec{x}_A = \chi(A) \vec{x}_A$$

$$A^k \vec{x}_A = (\chi(A))^k \vec{x}_A \quad \text{— см. индукцию по } k.$$

$$A^{k+1} \vec{x}_A = (\chi(A))^k A \vec{x}_A = (\chi(A))^{k+1} \vec{x}_A$$

$$A^t \vec{x}_A = (\chi(A))^t \vec{x}_A \Rightarrow (\chi(A))^t \text{ — собствен. число } A^t$$

$$\Rightarrow \chi(A^t) \geq (\chi(A))^t$$

$$\square, \text{ т.е. } (\chi(A^t)) > (\chi(A))^t$$

$$\hat{\rho} = (\chi(A^t))^{\frac{1}{t}} > \chi(A)$$

$$\Rightarrow \hat{\rho} \in M(A) \Rightarrow \exists \vec{x}^1 \geq 0$$

$$\hat{\rho} \hat{x} > A \hat{x} \geq 0 \Rightarrow \hat{x} > 0.$$

$$(\hat{p})^k \hat{x} > A^k \hat{x} \quad (\text{индукция по } k)$$

$$(\hat{p})^{k+1} \hat{x} > (\hat{p})^k A \hat{x} > A^{k+1} \hat{x}$$

$k=1$

$$(\hat{p})^1 \hat{x} > A^1 \hat{x} \xrightarrow{\text{def}} (\lambda(A^1)E - A^1) -$$

продуктивна $\Rightarrow \exists z \Rightarrow \lambda(A^1) \in M(A^1)?!$

Противоречие с леммой 1.

$$4) \lambda(A) = \inf_{p \in M(A)} p$$

Мораль: затрат на B ,
если на $A \Rightarrow$

$$\lambda(B) = \inf_{p \in M(B)} p$$

B -лучше, но
и ограниченный строгие

$$M(B) \supseteq M(A)$$

$$p \in M(A) \Rightarrow \exists x' \Rightarrow \exists \bar{x} \geq 0: p\bar{x} > A\bar{x} \geq B\bar{x}$$

$$\xrightarrow{\text{def}} (pE - B) - \text{продуктивна} \Rightarrow \exists x' \Rightarrow p \in M(B)$$

5) Без оцран. общности будем считать, что

$$A = \begin{pmatrix} C & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A \geq B \geq 0$$

4)

$$\Rightarrow \lambda(A) \geq \lambda(B). \quad \lambda(B) = \lambda(C) \Rightarrow \lambda(A) \geq \lambda(C)$$

(Товаров много, а мы выбер. нек-ое подмно-во)

6) $\boxed{\Leftarrow}$ след из 3) $\boxed{\Rightarrow}$ очевидно

Лекция 18

Упр 1 $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\overline{n}} \geq 0$

Для того, чтобы A была переставляемой
матр необходимо и достаточно, чтобы $\forall (i,j) \in \overline{n}$,
(где $\overline{n} = \{1, \dots, n\}$) $\exists t \geq 1$ такое $[A^t]_{i,j} > 0$

Предложение:

Пусть $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\overline{n}} \geq 0$

Тогда

1) если $\exists \vec{x} \geq 0$ такой, что $\rho \vec{x} \geq A \vec{x}$,
и $\rho \vec{x} - A \vec{x} \neq 0$, то $\exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0$

2) если $\exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0$, то $(\rho E - A)^{-1} > 0$

3) если $A \geq B \geq 0$, $A \neq B$, то $\chi(A) > \chi(B)$

4) если C главная, соотв. подматрица A ,
то $\det(\chi(A) E_C - C) > 0$

(где E_C един. матр таких же размеров, что
и C);

5) если $\varphi(\rho) = \det(\rho E - A)$, то $\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\chi(A)} > 0$
(Нет марж клетки)

Д-во: $\checkmark A^T$

1) $\Rightarrow A^*$ неугул. $\Rightarrow$ по Т4 $\exists \bar{r}_A > 0$

$$A^* \bar{r}_A = \kappa(A) \bar{r}_A$$

$$0 < (\bar{r}_A, \rho \bar{x} - A \bar{x}) = \rho (\bar{r}_A, \bar{x}) - (A^* \bar{r}_A, \bar{x}) = \\ = (\rho - \kappa(A)) (\bar{r}_A, \bar{x}) \Rightarrow \rho > \kappa(A) \stackrel{T_3}{\Rightarrow} \exists (\rho E - A)^{-1} \geq 0.$$

(остальные пункты док-ть самостоятельно)

§ 5 Устойчивые матрицы

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$ - неугулосимая матрица

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^t} A^t = \begin{cases} 0, & \text{если } \rho \geq \kappa(A) \\ X, & \text{если } \rho < \kappa(A). \end{cases}$$

по Т3 $\exists \bar{x}_A \geq 0, A \bar{x}_A = \kappa(A) \bar{x}_A$

$$\frac{1}{\rho^t} A^t \bar{x}_A = \left(\frac{\kappa(A)}{\rho} \right)^t \bar{x}_A$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(\kappa(A))^t} A^t = ?$$

~~~~~ неугул., неустойчивая

Пример:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$   $\kappa^2 - 1 = 0$   $\kappa_{1,2} = \pm 1$ ,

$$\kappa(A) = 1 \quad E A = A^2 = A^4 = \dots = A^{2k} =$$

$$A = A^3 = A^5 = \dots = A^{2k+1} =$$

=> Предела нет.

Опр 4 Пусть  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$

Будем говорить, что  $A$  устойчивая матрица, если  $\exists k \geq 1$  такое, что  $A^k > 0$ .

Лемма 7.5 (об устойчивых матрицах) ( $E \in \mathbb{R}$ )

Пусть  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$  неразложимая матрица, тогда:

1) для того, чтобы  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(A)^t} A^t = B$  (1) необходимо и достаточно, чтобы  $A$  была устойчивой матрицей.

2) если предел  $B$  в (1) существует, то каждый столбец матрицы  $B$  является вектором Ерден-Перрона matr.  $A$ , а каждая строка matr.  $B$  явл. век-ом Ерден-Перрона matr.  $A^*$ .

Д-во:

$$\lambda\left(\frac{1}{\lambda(A)} A\right) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(A)} = 1$$

Без ограничений общности будем считать, что  $\lambda(A) = 1$ .

Шаг 1:

$$A \cdot A^t = A^{t+1}$$
$$A^t \cdot A = A^{t+1}$$

Переходя к пределам, при  $t \rightarrow +\infty$ , получаем,  
 что  $A \cdot B = B$ ,  $B \geq 0$   
 $B \cdot A = B \Leftrightarrow A^* \cdot B^* = B^*$

Каждый столбец  $B$  является или вектором  
 Прод.-Перрона  $A$ , или нулевым вектором.

Каждая строка  $B$  явл. или вектором  
 Пр.-Пер.  $A^*$ , или нулевым вектором.

Допустим противное, что у  $B$   
 есть нулевой столбец  $\Rightarrow B$  каждой строке  $B$   
 есть нулевой элемент,  $A^*$  ненулевима  
 $\xRightarrow{T.4}$  векторы 'Прод.-Пер.  $A^*$  положительные,

$\Rightarrow$  каждая строка  $B$  нулевая  $\Rightarrow B = 0$

Но  $T_3 \quad \exists \vec{x}_A \geq 0$ ,  $\vec{x}_A \neq 0 : A \vec{x}_A = \vec{x}_A$

$\rightarrow A^t \vec{x}_A = \vec{x}_A \Rightarrow B \cdot \vec{x}_A = \vec{x}_A$ ,  $B = 0 \Rightarrow \vec{x}_A = 0$

- Противоречие  $\Rightarrow$  Столбцы  $B$  вектор

'Прод.-Пер.'  $A \xRightarrow{T_4} B > 0$ .

Шаг 2: (необходимость)

$\exists \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} A^t = B > 0$  шаг 1  $\Rightarrow$

$\rightarrow \exists k \geq 1 : A^k > 0$ .

## §4 Нередуцируемые матрицы

Опр 3 Будем говорить, что матрица  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$  является редуцируемой, если сущест. собств. подматр.  $J$  матр-во  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  такое, что  $a_{ij} = 0$  при  $i \in J, j \in N$  (1)

Замечание:

$$E_1 A E_1^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

### Критерий редуцируемости

Пусть  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^n$ ,  $a_{ij} \geq 0$ .

Для того, чтобы  $A$  была редуцируемой матрицей необх. и дост. чтобы  $\exists \vec{x} \geq 0, \vec{x} \neq 0$ ,  $\vec{x} \neq 0$  :  $A\vec{x} = \mu \vec{x}$  (2)

Док-во:

Достаточность:

$$J = \{j \mid [\vec{x}]_j > 0\}$$

-собств. подматр.  $N$ .

$$i \notin J \Rightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}]_j = \mu [\vec{x}]_i = 0$$

$$a_{ij} [\vec{x}]_j = 0 \text{ при } i \in J, j \notin N =$$

$$a_{ij} = 0, \text{ при } i \in J, j \in J.$$



### Необходимость:

Без ограничения общности будем считать,  
что  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$

Но  $\exists \vec{x}_{A_{11}} \geq 0, \vec{x}_{A_{11}} \neq 0$

$$A_{11} \vec{x}_{A_{11}} = \lambda(A_{11}) \vec{x}_{A_{11}}$$

$$\vec{x}^1 = \begin{pmatrix} \vec{x}_{A_{11}} \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0, \vec{x}^1 \neq 0, \vec{x}^1 \neq 0$$

$$A \cdot \vec{x}^1 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}_{A_{11}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} \vec{x}_{A_{11}} + A_{12} \vec{0} \\ 0 \vec{x}_{A_{11}} + A_{22} \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \vec{x}_{A_{11}} \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(A_{11}) \begin{pmatrix} \vec{x}_{A_{11}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda(A_{11}) \vec{x}^1 \Rightarrow \text{Необх. док-ли}$$

Предложение: Для того, чтобы  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\overline{n}} \geq 0$   
была ~~неразложимой~~ матрицей необходимо  
и достаточно, чтобы была ~~разложимой~~  
матр  $A^*$ .

Пр. 3': Будем говорить, что  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\overline{n}} \geq 0$   
явл. ~~неразложимой~~, если она не явл. ~~разло-~~  
~~жимой~~ или нулевой matr первого порядка.

74 Пусть  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$  неразложимая матрица, тогда:

1) если  $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$ ,  $\vec{x}_A \geq 0$ ,  $\vec{x}_A \neq 0$ ,

то  $\lambda(A) > 0$  и  $\vec{x}_A > 0$ ;

2) если  $A\vec{y} = \lambda(A)\vec{y}$ ,  $\vec{y} \neq 0$ , то  $\exists \theta$  такое, что

$$\vec{y} = \theta \vec{x}_A.$$

Док-во:

1)  $\neg \neg$ ,  $\exists \vec{x}_A \neq 0$ . По критерию разложимости матрица  $A$  разложима.

Противоречие!

$$\Rightarrow \vec{x}_A > 0 \Rightarrow A\vec{x}_A \neq 0 \Rightarrow \lambda(A) \neq 0 \Rightarrow \lambda(A) > 0$$

$$2) \min_i \frac{[\vec{y}]_i}{[\vec{x}_A]_i} = 0$$

$$\& \vec{y} = \theta \vec{x}_A \geq 0, \vec{y} - \theta \vec{x}_A \neq 0$$

$$\begin{aligned} A(\vec{y} - \theta \vec{x}_A) &= A\vec{y} - \theta A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{y} - \lambda(A)\theta \vec{x}_A = \\ &= \lambda(A)(\vec{y} - \theta \vec{x}_A) \end{aligned}$$

Если  $\vec{y} - \theta \vec{x}_A \neq 0$ , то  $A$  разложима (см. критерий)

$$\Rightarrow \vec{y} - \theta \vec{x}_A = 0$$

Возьмем  $k$  векторов из  $S$ .

Шаг 3: (докажем в данном случае, когда  $A > 0$ ).

$$\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} = \varepsilon > 0, \quad \vec{x}_A > 0, \quad A \vec{x}_A = \vec{x}_A$$

$$\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \frac{[\vec{x}_A]_j}{[\vec{x}_A]_i} = \delta > 0 \quad (2)$$

$$\vec{y}(t+1) = A \vec{y}(t), \quad \vec{y}(0) \geq 0, \quad \vec{y}(0) \neq 0$$

$$\vec{y}(t) = A^t \vec{y}(0)$$

$$\theta_i(t) = \frac{[\vec{y}(t)]_i}{[\vec{x}_A]_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$\alpha(t) = \min_{1 \leq i \leq n} \theta_i(t)$$

$$\theta_{el}(t) = \alpha(t)$$

$$\beta(t) = \max_{1 \leq i \leq n} \theta_i(t)$$

$$\theta_{sl}(t) = \beta(t)$$

$$\beta(t) \geq \alpha(t)$$

(3)

$$\begin{aligned} [\vec{y}(t+1)]_i &= \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{y}(t)]_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j \theta_j(t) = \\ &= a_{iel}(t) [\vec{x}_A]_{el(t)} \cdot \alpha(t) + \sum_{j \neq el(t)} a_{ij} [\vec{x}_A]_j \theta_j(t) \leq \\ &\leq a_{iel}(t) [\vec{x}_A]_{el(t)} \cdot \alpha(t) + \beta(t) \sum_{j \neq el(t)} a_{ij} [\vec{x}_A]_j = \\ &= a_{iel}(t) [\vec{x}_A]_{el(t)} (\alpha(t) - \beta(t)) + \end{aligned}$$

$$+ \beta(t) \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j = a_{ie(t)} [\vec{x}_A]_{e(t)}$$

$$\cdot (\alpha(t) - \beta(t)) + \beta(t) [\vec{x}_A]_i$$

$$\theta_i(t+1) = \frac{[\vec{y}(t+1)]_i}{[\vec{x}_A]_i} \leq a_{ie(t)} \frac{[\vec{x}_A]_{e(t)}}{[\vec{x}_A]_i} (\alpha(t) - \beta(t)) +$$

$$+ \beta(t) \leq \varepsilon \cdot \delta (\alpha(t) - \beta(t)) + \beta(t)$$

$$\Rightarrow \beta(t+1) \leq \varepsilon \delta (\alpha(t) - \beta(t)) + \beta(t)$$

$$\beta(t) - \beta(t+1) \geq \varepsilon \cdot \delta (\beta(t) - \alpha(t)) \quad (4)$$

$$[\vec{y}(t+1)]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{y}(t)]_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j \theta_j(t) =$$

$$= a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} \beta(t) + \sum_{j \neq s(t)} a_{ij} [\vec{x}_A]_j \theta_j(t) \geq$$

$$\geq a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} \beta(t) + \alpha(t) \sum_{j \neq s(t)} a_{ij} [\vec{x}_A]_j =$$

$$= a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} (\beta(t) - \alpha(t)) + \alpha(t) \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j =$$

$$= a_{is(t)} [\vec{x}_A]_{s(t)} (\beta(t) - \alpha(t)) + \alpha(t) [\vec{x}_A]_i$$



$$D_i(t+1) = \frac{[\bar{y}(t+1)]_i}{[\bar{x}_A]_i} \geq Q_{is}(t) \frac{[\bar{x}_A]_{s(t)}}{[\bar{x}_A]_i} (\beta(t) - \alpha(t)) + \alpha(t) \geq$$

$$\geq \varepsilon \cdot \delta (\beta(t) - \alpha(t)) + \alpha(t)$$

$$\alpha(t+1) \geq \varepsilon \cdot \delta (\beta(t) - \alpha(t)) + \alpha(t)$$

$$\alpha(t+1) - \alpha(t) \geq \varepsilon \cdot \delta \cdot (\beta(t) - \alpha(t)) \quad (5)$$

$$(3), (4) \quad \{ \beta(t) \mid t=1, 2, 3, \dots \} \searrow$$

$$(3), (5) \quad \{ \alpha(t) \mid t=1, 2, 3, \dots \} \nearrow$$

Покажем, что  $\beta(t) \geq \alpha(t)$

1) если  $t = \tau$ , то см. (3)

2) если  $t > \tau$

$$\alpha(\tau) \leq \alpha(t) \stackrel{(3)}{\leq} \beta(t)$$

поп.  
 $\alpha(t)$

3) если  $t < \tau$

$$\beta(t) \geq \beta(\tau) \stackrel{(3)}{\geq} \alpha(\tau)$$

Поскольку оцр. монот. посл-во предел.,  
получаем, что:

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = \hat{\alpha} \quad (6)$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} \beta(t) = \hat{\beta} \quad (7)$$

$$0 \stackrel{(3)}{\leq} \beta(t) - \alpha(t) \stackrel{(4)}{\leq} \frac{1}{2 \cdot \varepsilon \cdot \delta} (\beta(t) - \beta(t+1))$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\beta(t) - \alpha(t)) = 0 \quad (8)$$

$$(6), (7), (8) \Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$

$$\alpha(t) \leq \theta_i(t) \leq \beta(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ i=1, k}} \theta_i(t) = \hat{\alpha}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{y}(t) = \alpha \cdot \vec{x}_A$$

Лемма 4 (достаточность в общем случае)

$$A^k > 0 ; \quad t = q(t) \cdot k + r(t)$$

$$r(t) \in \{0, 1, \dots, k-1\}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = +\infty$$

$$A^t = A^{r(t)} (A^k)^{q(t)}$$

$$\exists \lim_{t \rightarrow +\infty} (A^k)^{q(t)} = B \quad (\text{лемма 3})$$

$$\chi(A^k) = (\chi(A))^k = 1$$

$$A \vec{x}_A = \vec{x}_A, \quad \vec{x}_A > 0 \quad (\text{лемма 4})$$

$$A^k \vec{x}_A = \vec{x}_A, \quad \vec{x}_A - \text{вектор П.-Н. матриц } A^k \text{ и } A$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = B \\ A^2 B = B \\ \vdots \\ A^{k-1} B = B \end{array} \right\} \Rightarrow A^{r(t)} B = B$$

$$(A^k)^{q(t)} = B + R(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A R(t) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A^{k-1} R(t) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} R(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} A R(t) = 0 \\ \dots \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} A^{k-1} R(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} A^{2(t)} R(t) = 0 \quad (10)$$

$$A^t = A^{2(t)} (A^k)^{q(t)} = A^{2(t)} (B + R(t)) = B + A^{2(t)} R(t)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A^t \stackrel{(10)}{=} B. \quad \blacksquare$$

Опр. 5 ]  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$  нестрог. матр. будем гов-ть, что  $A$  допускает

циклич. разложение, если ] ф. мн-ва  $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_{s-1}$

( $s \geq 2$ ):

$$1) \mathcal{I}_m \cap \mathcal{I}_\ell = \emptyset \text{ при } m \neq \ell$$

$$2) \bigcup_{k=0}^{s-1} \mathcal{I}_k = N = \{1, 2, \dots, n\}$$

$$3) \text{ если } j \in \mathcal{I}_k, a_{ij} > 0, \text{ то } i \in \mathcal{I}_{k+1} \pmod{s}$$

P.S.:

$$E_n A E_n^* = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_0 & \mathcal{I}_1 & \dots & \mathcal{I}_{s-1} \\ 0 & 0 & \dots & * \\ * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & * & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{I}_{s-1} \end{matrix}$$

176]  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} \geq 0$  неупр. матр

Тогда след. утв-ия экв-ты:

- 1)  $A$  доминирующая матр., т.е.  $\exists k: A^k > 0$ .
- 2)  $A$  не допускает цикл. разложения.
- 3)  $\text{MOD } \{t \mid [A^t]_{ii} > 0\} = 1$
- 4) если  $A\vec{z} = \omega\vec{z}$ ,  $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ,  $|\omega| = \rho(A)$ ,  
то  $\omega = \rho(A)$

Замечание:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_0 = \{1\}, J_2 = \{2\}, \dots, S = 2$$

$$A^{2k} = E, A^{2k+1} = A, \lambda_{1,2} = \pm 1$$

Замечание:  $i, j, \dots, n$   
 $t = 0, 1, 2, \dots$

$$P\{X(t+1) = i \mid X(t) = j\} = a_{ij} \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad (j = \overline{1, n})$$

$\Rightarrow A = \|a_{ij}\|_{i,j=\overline{1,n}} \geq 0$  - матр. перехода в вер-ей

$$A\vec{x}_A = \rho(A)\vec{x}_A, \vec{x}_A \geq 0, \vec{x}_A \neq 0$$

$$\rho(A)[\vec{x}_A]_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j, i = \overline{1, n}$$

$$\rho(A) \left( \sum_{i=1}^n [\vec{x}_A]_i \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} [\vec{x}_A]_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n a_{ij} \right) [\vec{x}_A]_j = \sum_{j=1}^n 1 \cdot [\vec{x}_A]_j = \sum_{j=1}^n [\vec{x}_A]_j$$



$$\stackrel{\text{copybook}}{=} \sum_{j=1}^n [\chi_A]_j \Rightarrow \chi(A) = I$$

$$\vec{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{y}_i(t) = I$$

$$\vec{y}(t+1) = A \vec{y}(t)$$

## §6 Идемпотентный

аналог теорем о неотриц. матрицах.

Рассм  $K_+$ . (Рассм. полукольца)

$$a \odot b = a \cdot b$$

$$a \oplus b = \max(a, b) \text{ - нет одр. опер-ции}$$

$$(a \odot b) \odot c = (a \odot c) \odot (b \odot c)$$

$$a \oplus a = a \text{ - св. во идемпотентности.}$$

Раздел 6.1. Модель баланса

знаний Канторовича - Макарова

$1, 2, \dots, n$

$x_i$  - направление

$$a_{ij} x_j \leq x_i ; i, j = \overline{1, n}$$

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \leq x_i , i = \overline{1, n}$$

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) > 0$$

$$A \cdot \vec{x} \in \vec{x}$$

$$A \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots$$

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n} > 0$$

Опр. Будем говорить, что  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n} > 0$  лл. продуктивной в идемпотентном смысле, если  $\exists \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) > 0$ :

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \leq x_i, \quad i = \overline{1, n}$$

10.10.18

## §6.2. Арбитражные цены на валютном рынке

1, 2, ..., n

$a_{ij}$  - кол-во валюты  $j$ -го вида, кот. можно по-  
лучить при обмене 1 единицы валюты

$i$ -ого вида

$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} > 0$  - матрица кросс-курсов валют.

Впр. Будем говорить, что упоряд набор  
 $(i_1, \dots, i_k)$ , где  $i_j = \{1, 2, \dots, n\}$  явл. арбитраж.  
ценожкой, если

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} > 1$$

Задача 1:

По матрице  $A$  кросс-курсов определить,  
есть ли арбитражные цены. Если  
есть, то найти одну из них.

Если действ. переставим

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \cdot k! \quad - \text{оцр. число}$$

$$\frac{a_{ij}}{2} < \text{комиссия банка}$$

$$i: 1, \dots, k$$

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \dots \cdot a_{i_k i_1} \leq \rho^k$$

Не растёт слишком сильно суза конкуренции банков. Банк миним. такое  $\rho$ .

## Задача 2

Найти минимальное  $\rho$ , при котором отсутствуют арбитражные цепочки.

$x_i > 0$  - обменный курс  $i$ -ой валюты "евро"

Построить:  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) > 0$ .

$$(i \rightarrow j) \quad a_{ij} \cdot x_j \leq x_i \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

(если не было выгоды при обмене)

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \leq x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

## Теор. 7 (Афреата-Вересни)

Пусть  $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,n} > 0$

Тогда следующие утверждения эквивалентны

1)  $A$  продуктивна в <sup>целом</sup> ~~компонентном~~ смысле, т.е.  $\exists (x_1, \dots, x_n) > 0$ :

$$\max_{1 \leq j \leq n} a_{ij} x_j \leq x_i \quad (i = 1, \dots, n)$$



2) у матрицы  $A$  нет арбитражных циклов, т.е.  $\forall (i_1, \dots, i_k)$

$$a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_k i_1} \leq 1.$$

Дока:

1)  $\Rightarrow$  2). Рассмотрим  $(i_1, \dots, i_k)$

$$\exists \vec{x} = (x_1, \dots, x_k) > 0$$

$$a_{i_1 i_2} x_{i_2} \leq x_{i_1}$$

$$a_{i_2 i_3} x_{i_3} \leq x_{i_2}$$

...

$$a_{i_{k-1} i_k} x_{i_k} \leq x_{i_{k-1}}$$

$$a_{i_k i_1} x_{i_1} \leq x_{i_k}$$

---


$$(a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k i_1}) \left( \prod_{j=1}^k x_{i_j} \right) \leq \prod_{j=1}^k x_{i_j} \text{ 'инг.}$$

$$\Rightarrow a_{i_1 i_2} \dots a_{i_k i_1} \leq 1$$

2)  $\Rightarrow$  1). Введём вспомогат. числа:

$$\hat{a}_{ij} = \sup_{(i_1, \dots, i_k)} (a_{i i_1} a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k} a_{i_k j})$$

$$a_{i i_1} (a_{i_1 i_2} \dots a_{i_{k-1} i_k})^{\frac{1}{k}} a_{i_k j}$$

если есть арб. ц.  $\Rightarrow$   $\uparrow$  спектр.  
нет  $\Rightarrow$  конечна.  $(i_1, \dots, i_k)$   $\uparrow$  все разл.

$$\Rightarrow \hat{a}_{ij} - \text{достат.}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{A} = \| \hat{a}_{ij} \|_{i,j=1, \dots, n} \geq 0$$

$$\hat{x}_i = \max_j \hat{a}_{ij} = \sup_{(i_1, \dots, i_{k-1})} a_{ii_1} a_{ii_2} \dots a_{ik i_{k-1}}$$

Sup по подмнож.  $\{j\}$

$$\geq \sup_{(i_1, \dots, i_{k-1})} a_{ij} a_{ji_1} \dots a_{ik i_{k-1}} = a_{ij} \sup_{(i_1, \dots, i_{k-1})} a_{ji_1} \dots a_{ik i_{k-1}} =$$

$$= a_{ij} \hat{x}_j \quad \text{т.е.} \quad \hat{A} = \hat{A} \hat{x}$$

Замечание:  $\hat{A} = \underbrace{A \oplus A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{\oplus n}$

$\Rightarrow$  для задачи нужно не более  $(n^3)$  опер.  
алгоритм Варшавы - Флойда.

## Глава 2 Экономическая интерпретация двойственности.

§1 Некоторые сведения теории двойственности в задачах линейного программирования

Задача лин. програм-ия со смешанными ограничениями:

$$\vec{C} \vec{x}_1 + \vec{C}_2 \vec{x}_2 \rightarrow \max \quad (1)$$

$$A_{11} \vec{x}_1 + A_{12} \vec{x}_2 \leq \vec{b}_1 \quad (2)$$

$$A_{21} \vec{x}_1 + A_{22} \vec{x}_2 = \vec{b}_2 \quad (3)$$

$$\vec{x}_1 \geq 0 \quad (4)$$

Здесь  $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\vec{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$ ,  $\vec{b}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $\vec{b}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$   
 $\vec{c}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\vec{c}_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$

$A_{11}$  - матрица  $(m_1 \times n_1)$

$A_{12}$  -  $m_1 \times n_2$

$A_{21}$  -  $m_2 \times n_1$

$A_{22}$  -  $m_2 \times n_2$

~~Версия~~

Т (Теорема двойственности)

Задача л.н. прог. (1) - (4) имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение двойств. задача.

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 \rightarrow \min \quad (5)$$

(\*) - транс.

$$A_{11}^* y_1 + A_{21}^* y_2 \geq \vec{c}_1 \quad (6)$$

$$A_{12}^* y_1 + A_{22}^* y_2 = \vec{c}_2 \quad (7)$$

$$\vec{y}_1 \geq 0 \quad (8)$$

Если реш. (1) - (4)  $\exists$ , то оптимальные значения функц-ов в з.л.н. (1) - (4) и з.л.н. (5) - (8) равны.

### Предложение 1

Пусть  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  удовлетворяет (2) - (4),

а  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  удовл. (6) - (8). Тогда

$$\vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 \leq \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2$$

Док. во:

$$\begin{aligned} & (\vec{b}_1, \vec{u}_1) + (\vec{b}_2, \vec{u}_2) \stackrel{(9)}{\geq} \\ & \geq (A_{11} \vec{x}_1 + A_{12} \vec{x}_2, \vec{u}_1) + (A_{21} \vec{x}_1 + A_{22} \vec{x}_2, \vec{u}_2) = \\ & = (\vec{x}_1, A_{11}^* \vec{u}_1 + A_{21}^* \vec{u}_2) + (\vec{x}_2, A_{12}^* \vec{u}_1 + A_{22}^* \vec{u}_2) \\ & \stackrel{(10)}{\geq} (\vec{c}_1, \vec{x}_1) + (\vec{c}_2, \vec{x}_2) \end{aligned}$$

Следствие 1 — " —  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2), (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ .

Для того, чтобы  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  было решением  
з. л. п. (1) - (4), а  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  было реш. з. (5) - (8)

необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 = \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2$$

Д-во:

В  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$  удовл. (2) - (4)

$$\vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 \leq \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 = \vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2$$

Критерий оптимальности в форме усл.  
дополняющей нежесткости)

— " — Необх. и дост., чтобы



$$(\vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11} \vec{x}_1 - A_{12} \vec{x}_2) = 0 \quad (9)$$

$$(\vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^* \vec{u}_1 - A_{21}^* \vec{u}_2) = 0 \quad (10)$$

(см. в предл. 1)

Всп. Функция Лагранжа з.п.п. (1)-(4)

наз. ф-ция  $\vec{x}_1 \in \mathbb{R}_+^{n_1}, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_2},$

$\vec{u}_1 \in \mathbb{R}_+^{m_1}, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = & \vec{c}_1 \vec{x}_1 + \vec{c}_2 \vec{x}_2 + \\ & + (\vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11} \vec{x}_1 - A_{12} \vec{x}_2) + (\vec{u}_2, \vec{b}_2 - A_{21} \vec{x}_1 - \\ & - A_{22} \vec{x}_2) \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{=} & \vec{b}_1 \vec{u}_1 + \vec{b}_2 \vec{u}_2 + (\vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^* \vec{u}_1 - A_{21}^* \vec{u}_2) + \\ & + (\vec{x}_2, \vec{c}_2 - A_{12}^* \vec{u}_1 - A_{22}^* \vec{u}_2) \end{aligned}$$

(одна и та же ф-ция Лагранжа описыв. и прямую и двойств. задачу)

§2 Экономич. интерпр.

двойственности

Трудовая теория стоимости и её критика

Пример 1. ("Колониальная экономика")

$$\vec{x} = A \vec{x} + \vec{\omega}, \quad \vec{\omega} \geq 0, \quad \vec{c} \vec{x} \leq R \quad \begin{matrix} \text{сирос} \\ \text{и прегн} \end{matrix}$$

$A \geq 0$  - продуктивна, по т. 1'гл.1.  $(E - A)^{-1} \geq 0$

$R > 0$  - кол-во трудовых ресурсов

$\vec{c} = (c_1, \dots, c_n) > 0$  - вектор трудоемкости

$\vec{A} = (A_1, \dots, A_n)$  - вектор мировых цен

Напишем:

$$\begin{cases} \vec{A} \vec{\omega} \rightarrow \max \\ \vec{x} = A \vec{x} + \vec{\omega} \quad \{ \vec{p} \\ \vec{c} \vec{x} \leq R \quad \{ s^* \geq 0 \\ \vec{\omega} \geq 0 \end{cases}$$

(слот. при выпукл. оск  
долж.  $\geq 0$ ).

$$\mathcal{L}(\vec{x}, \vec{\omega}, \vec{p}, s) = \vec{A} \vec{\omega} + (\vec{p}, \vec{x} - A \vec{x} - \vec{\omega}) +$$
$$+ s(R - \vec{c} \vec{x}) =$$

$$= sR + (\vec{x}, \vec{p} - A^T \vec{p} - s \vec{c}) + (\vec{\omega}, \vec{A} - \vec{p})$$

Построим двойств:

$$\begin{cases} sR \rightarrow \min \\ \boxed{\vec{p} = A^T \vec{p} + s \vec{c}} \\ \vec{p} \geq \vec{A} \\ s \geq 0 \end{cases}$$

Основное соотнош.  
трудовой теории  
стоимости

$$\vec{A} \vec{\omega} = sR \quad (1)$$

$$s(R - \vec{c} \vec{x}) = 0 \quad (2)$$

$$(\vec{\omega}, \vec{A} - \vec{p}) = 0 \quad (3)$$

$\vec{p} = (p_1, \dots, p_n)$  - вектор цен  
 $s$  - ставка зар. платы

$$\vec{p} = s (E - A^T)^{-1} \vec{c}$$

$$\vec{c} = (E - A^T)^{-1} \vec{c} \stackrel{1.2.2.1}{=} \vec{c} + A^T \vec{c} + (A^T)^2 \vec{c} + \dots$$

$\uparrow$  вектор полной трудоёмкости

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\hat{c}_i}{\hat{c}_j} - \text{цен отнош. труд. ст-ти.}$$

Народ. х-во

Общество

$\vec{p} \vec{c}$

$\vec{c}^T \vec{x}$

$s \vec{c}^T \vec{x} - \text{зар/мл.}$

Основной финансовый баланс  
народного х-ва:

$$\vec{p} \vec{c} \stackrel{(3)}{=} \vec{H} \vec{c} \stackrel{(1)}{=} s R \stackrel{(2)}{=} s \vec{c}^T \vec{x}$$

(Доходы Н.Х = Расходам)

$$\vec{s} \vec{c} \geq \vec{H} \Rightarrow s = \min_j \frac{H_j}{\hat{c}_j}$$

если  $s \hat{c}_j \geq H_j$ , то  $\omega_j = 0$  ч/з (3)

## Пример 2 (Даннотриальный капитализм)

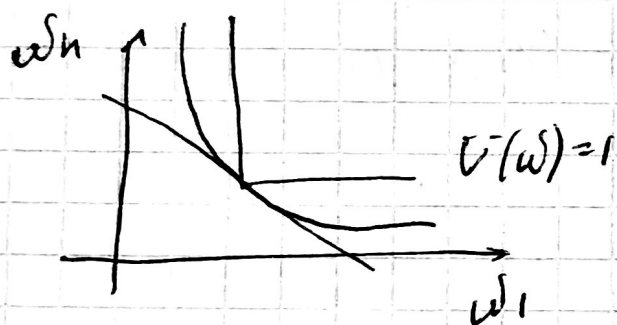
$V(\vec{\omega})$  - вогнутая, нестр., полем. однор. ф-ция полезности

$$R_+^n, \quad V(\lambda \vec{\omega}) = \lambda V(\vec{\omega})$$

$$\forall \vec{\omega} \geq 0, \quad \forall \lambda > 0$$

$$V(\vec{\omega}) = \min_j \frac{\omega_j}{k_j}$$

$\vec{k} = (k_1, \dots, k_n) \geq 0$  - структура потребления



$$\left\{ \begin{array}{l} w \rightarrow \max \\ \vec{x} = A\vec{x} + \vec{\omega} \\ \vec{\omega} \vec{k} \leq \vec{\omega} \rightarrow \text{имеем ж.п.} \\ \vec{c}\vec{x} \leq R \\ \vec{\omega} \geq 0 \\ w \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Hw \rightarrow \max \\ \vec{x} - A\vec{x} \geq w \vec{k} \\ \vec{c}\vec{x} \leq R \\ w \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{p} \geq 0 \\ s \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{x}, w, \vec{p}, s) &= Hw + (\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - w\vec{k}) + s(R - \vec{c}\vec{x}) \\ &= sR + (\vec{x}, \vec{p} - A^T \vec{p} - s\vec{c}) + w(H - \vec{p}\vec{k}) \end{aligned}$$



$$\begin{cases} SR \rightarrow \min \\ \bar{p} = A^T \bar{p} + s \bar{c} \\ \bar{p} \bar{k} \geq H \\ s \geq 0, \bar{p} \geq 0 \end{cases}$$

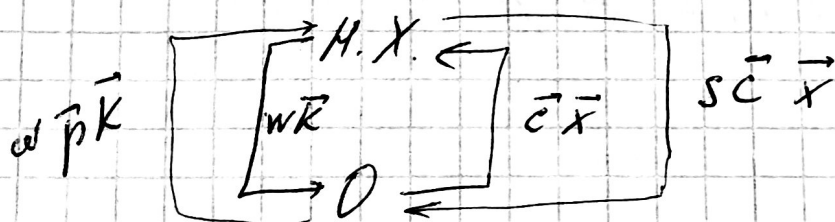
$$\left\{ \begin{aligned} q(\bar{p}) &\geq H \\ q(\bar{p}) &= \inf \frac{\bar{p} \bar{w}}{U(\bar{w})} \\ &\text{— миним. уднер.} \end{aligned} \right.$$

$$H \bar{w} = SR \quad (1')$$

$$(\bar{p}, \bar{x} - A \bar{x} - w \bar{k}) = 0$$

$$s(k - \bar{c} \bar{x}) = 0 \quad (2)$$

$$w(H - \bar{p} \bar{k}) = 0 \quad (3')$$



Осн. баланс (финанс.) нар. хо-ва:

$$w \bar{p} \bar{k} \stackrel{(3')}{=} H \bar{w} \stackrel{(1')}{=} SR \stackrel{(2)}{=} s \bar{c} \bar{x}$$

Пример 3 (Индустриализация)

$P > 0$  — производств. фонды

$\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) > 0$  — вектор фондоемкости

$$\begin{cases} Hw \rightarrow \max \\ \bar{x} - A\bar{x} \geq w\bar{k} \quad \{\bar{p} \geq 0 \\ C\bar{x} \leq R \quad \{s \geq 0 \\ b\bar{x} \leq P \quad \{z \geq 0 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

$z$ -орендна мата за производство фондн.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\bar{x}, w, \bar{p}, s, z) &= Hw + (\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w\bar{k}) + \\ &+ s(R - C\bar{x}) + z(P - b\bar{x}) = \\ &= sR + zP + (\bar{x}, \bar{p} - A^T \bar{p} - s\bar{C} - z\bar{b}) + \\ &+ w(H - \bar{p}\bar{k}) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} sR + zP \rightarrow \min \\ \bar{p} = A^T \bar{p} + s\bar{C} - z\bar{b} \\ \bar{p}\bar{k} \geq H \\ s \geq 0, z \geq 0, \quad \bar{p} \geq 0 \end{cases}$$

$$Hw = sR - zP \quad (1'')$$

$$(\bar{p}, \bar{x} - A\bar{x} - w\bar{k}) = 0$$

$$s(R - C\bar{x}) = 0 \quad (2)$$

$$z(P - b\bar{x}) = 0 \quad (4)$$

$$w(H - \bar{p}\bar{k}) = 0 \quad (3')$$

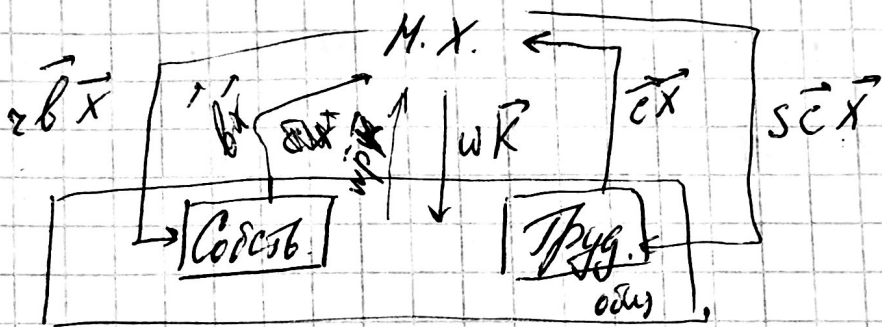
$$\vec{c}^1 = (E - A^T)^{-1} \vec{c} = \vec{c} + A^T \vec{c} + (A^T)^2 \vec{c} + \dots$$

↑  
вектор полных трудоемкостей

$$\vec{b} = (E - A^T)^{-1} \vec{b} = \vec{b} + A^T \vec{b} + (A^T)^2 \vec{b} + \dots$$

↑  
вектор полных фондоемкостей

$$\vec{p} = s\vec{c} + r\vec{b}$$



Основной финансов. баланс М.Х.

$$W \bar{p} \bar{K} \xrightarrow{(3')} HW \xrightarrow{(1''')} SR + 2P \xrightarrow{(2), (4)} S \bar{C} \bar{X} + 2 \bar{b} \bar{X}$$

Книжки общества должны быть лидер

Пример 4 (Индустриальный капитализм)

$\vec{f} = (f_1, \dots, f_n) > 0$  - строго положительный вектор.

$$\begin{cases}
 AW \rightarrow \max \\
 \vec{x} - A\vec{x} \geq w\vec{k} + R\vec{j} \quad \vec{p} \geq 0 \\
 \vec{c}\vec{x} \leq R \quad s \geq 0 \\
 \vec{b}\vec{x} \leq P \quad z \geq 0 \\
 w \geq 0, \quad \underline{R \geq 0}
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\vec{x}, w, R, \vec{p}, s, z) &= \\
 &= AW + (\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - w\vec{k} - R\vec{j}) + s(R - \vec{c}\vec{x}) + \\
 &\quad + z(P - \vec{b}\vec{x}) = zP + (\vec{x}, \vec{p} - A^T\vec{p} - s\vec{c} - z\vec{b}) + \\
 &\quad + w(A - \vec{p}\vec{k}) + R(s - \vec{p}\vec{j})
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 zP \rightarrow \min \\
 \vec{p} = A^T\vec{p} + s\vec{c} + z\vec{b} \\
 \vec{p}\vec{k} = A \\
 \vec{p}\vec{j} = s \\
 s \geq 0, z \geq 0, \quad \vec{p} \geq 0
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 zP &= AW \quad (1^{st}) \\
 (\vec{p}, \vec{x} - A\vec{x} - w\vec{k} - R\vec{j}) &= 0
 \end{aligned}$$

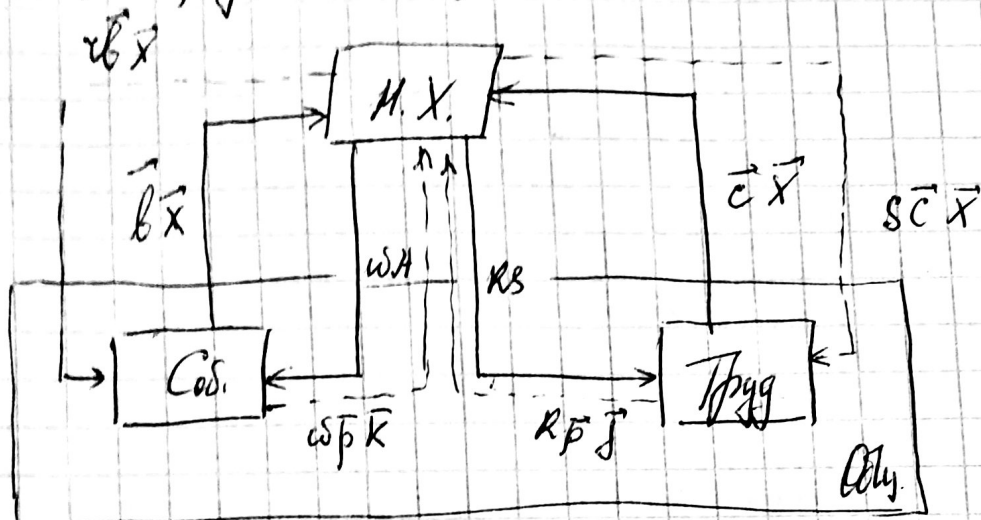


$$s(R - \bar{c}\bar{x}) = 0 \quad (2)$$

$$w(K - \bar{p}\bar{K}) = 0 \quad (3')$$

$$z(P - \bar{b}\bar{x}) = 0 \quad (4)$$

$$R(S - \bar{r}\bar{J}) = 0 \quad (5)$$



Баланс доходов и расходов трудящихся

$$s\bar{c}\bar{x} = sR = R\bar{p}\bar{J} \quad (2) \quad (5)$$

Баланс доходов и расходов собственников

$$z\bar{b}\bar{x} = zP = w = w\bar{p}\bar{K} \quad (4) \quad (1''') \quad (3')$$

$\Sigma$  Расходы нар. х. = Доходам н. х.

$$\hat{\bar{c}} = (E - A^*)^{-1} \bar{c}, \quad \hat{\bar{b}} = (E - A^*)^{-1} \bar{b},$$

$$\hat{\bar{p}} = s\hat{\bar{c}} + z\hat{\bar{b}}$$

Случай  $K > 0$  (случай экон. продуктивности)

$$(5) \Rightarrow s = \bar{p} \bar{J} = s \langle \hat{c}, \bar{J} \rangle + z \langle \hat{b}, \bar{J} \rangle$$

$$z = s \cdot \frac{1 - \langle \hat{c}, \bar{J} \rangle}{\langle \hat{b}, \bar{J} \rangle}, \text{ чтобы } z \geq 0$$

← "забастовка"

нужно  $\boxed{1 > \langle \hat{c}, \bar{J} \rangle}$  ← условие экон. прод-ти

$$\hat{c} = \bar{c} + A^* \bar{c} + (A^*)^2 \bar{c} + \dots \Rightarrow \hat{c} = \bar{c} (I - A^*)^{-1}$$

$$\bar{p} = s \hat{c} + z \hat{b} = s \left( \hat{c} + \frac{1 - \langle \hat{c}, \bar{J} \rangle}{\langle \hat{b}, \bar{J} \rangle} \hat{b} \right)$$

Пример 5 ("Неоколонизм")

$\bar{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$  — сальдо экспортно-импортных операций  
 доход  $\rightarrow \max \bar{J} \bar{\omega}$  стоим. экспор. - с. импорта

$\begin{cases} \bar{x} \geq A \bar{x} + K \bar{J} + \bar{\omega} & \{ \bar{p} \geq 0 \\ \bar{c} \bar{x} \leq K & \{ s \geq 0 \\ \bar{b} \bar{x} \leq \varphi & \{ z \geq 0 \\ K \geq 0, \bar{x} \geq 0 \end{cases}$

ниоткуда не следует

$$\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\omega}, K, \bar{p}, s, z) = \bar{J} \bar{\omega} + \langle \bar{p}, \bar{x} - A \bar{x} - K \bar{J} - \bar{\omega} \rangle +$$

$$+ s(K - \bar{c} \bar{x}) + z(\varphi - \bar{b} \bar{x}) = z\varphi + \langle \bar{x}, \bar{p} - A^* \bar{p} - s \bar{c} - z \bar{b} \rangle + \langle \bar{\omega}, \bar{J} - \bar{b} \rangle + K(1 - \bar{p} \bar{J})$$

$$\begin{cases} z \in P \rightarrow \min \\ \vec{p} = A^* \vec{p} + s \vec{c} + z \vec{b} \\ \vec{p} = \vec{A} \quad (\text{не дана логистика, транспортировка, ...}) \\ \vec{p} \cdot \vec{j} \geq s \\ \vec{p} \geq 0, s \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

$$\vec{A} \vec{\omega} = z P \quad (1')$$

$$\langle \vec{p}, \vec{x} - A \vec{x} - R \vec{j} - \vec{\omega} \rangle = 0$$

$$s(R - \vec{c} \vec{x}) = 0 \quad (2)$$

$$z(P - \vec{b} \vec{x}) = 0 \quad (4)$$

$$R(s - \vec{p} \cdot \vec{j}) = 0 \quad (5)$$

$$\langle \vec{x}, \vec{p} - A^* \vec{p} - s \vec{c} - z \vec{b} \rangle = 0 \quad (6)$$

Вектор  $\vec{x} \neq 0, R > 0$  (случай экон. прогр-ти)

$$(5) \Rightarrow s = \vec{p} \cdot \vec{j} = \underbrace{\vec{A} \cdot \vec{j}}_{\text{известно}}$$

$$\vec{H} - A^* \vec{H} - \langle \vec{H}, \vec{j} \rangle \vec{c} \leq z \vec{b}, \text{ все цев. кроме } z$$

$$z \geq \max_j \frac{H_j - [A^* \vec{H}]_j - \langle \vec{H}, \vec{j} \rangle c_j}{b_j} \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$$

Условие продуктивности:  $z \geq 0$  (если  $z < 0$ , тогда (6)  $\Rightarrow \vec{x} \equiv 0$ )

### §3. Декомпозиционная св ва цен и множителей Лагранжа

Энергия - свободно перемещ. ресурс (СТР)

В Америке труд - СТР

Предприятие - неперемещ. ресурс

$\exists 1, 2, \dots, m$  регионов.  $A(j) \geq 0$  - матрица  $\leftarrow$  структура потребл. в  $j$ -ом рег.

$$(I) \begin{cases} \vec{x}(j) \geq A(j) \vec{x}(j) + \omega(j) \vec{k} & \{ \vec{p}(j) \geq 0 \\ \vec{v}(j) \vec{x}(j) \leq P(j) \} \quad \{ z(j) \quad (j=1, \dots, m) \\ \sum_{j=1}^m \vec{c}(j) \vec{x}(j) \leq R \quad \{ s \geq 0 \\ \omega(j) \geq 0 \\ \sum_{j=1}^m A(j) \omega(j) \rightarrow \max \end{cases}$$

ур-ие максимизации

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\{ \vec{x}(j), \omega(j), \vec{p}(j), z(j) \mid j=\overline{1, m} \}, s) &= \\ &= \sum_{j=1}^m \{ A(j) \omega(j) + \langle \vec{p}(j), \vec{x}(j) - A(j) \vec{x}(j) - \omega(j) \vec{k}(j) \rangle + \\ &+ z(j) (P(j) - \vec{v}(j) \vec{x}(j)) \} + s (R - \sum_{j=1}^m \vec{c}(j) \vec{x}(j)) = \\ &= \sum_{j=1}^m z(j) P(j) + sR + \sum_{j=1}^m \{ \langle \vec{x}(j), \vec{p}(j) - A^*(j) \vec{p}(j) - \end{aligned}$$



$$-s\vec{c}(j) - z(j)\vec{b}(j) \geq \omega(j)(H(j) - \vec{p}(j)\vec{k}(j))$$

$$(II) \begin{cases} \sum_{j=1}^m z(j) P(j) + sR \rightarrow \min \\ \vec{p}(j) = A^*(j)\vec{p}(j) + z(j)\vec{b}(j) - s\vec{c}(j), j = \overline{1, m} \\ \vec{p}(j) \cdot \vec{k}(j) \geq H(j) \\ s \geq 0, z(j) \geq 0, \vec{p}(j) \geq 0 \end{cases}$$

$$\langle \vec{p}(j), \vec{x}(j) - A(j)\vec{x}(j) - \omega(j)\vec{k}(j) \rangle = 0 \quad (3j)$$

$$z(j)(P(j) - \vec{b}(j)\vec{x}(j)) = 0 \quad (4j)$$

$$s(R - \sum_{j=1}^m \vec{c}(j)\vec{x}(j)) = 0 \quad (5)$$

$$\omega(j)(H(j) - \vec{p}(j)\vec{k}(j)) = 0 \quad (6j)$$

Предложение 2

$\exists \{ \hat{\vec{x}}(j), \hat{\omega}(j) \mid j = \overline{1, m} \}$  - решение ЗЛП (I),  
 $\alpha \{ \hat{\vec{p}}(j), \hat{z}(j) \mid j = \overline{1, m} \}, \hat{s}$  - реш. ЗЛН (II)  
 и  $1 \leq i \leq m$ . Тогда  $\{ \hat{\vec{x}}(i), \hat{\omega}(i) \}$  явл.  
 решением ЗЛН I

$$(7) \begin{cases} \vec{x}(i) \geq A(i)\vec{x}(i) + \omega(i)\vec{k}(i) \\ \vec{b}(i)\vec{x}(i) \leq P(i) \\ \omega(i) \geq 0, \\ H(i)\omega(i) - \hat{s} < \vec{c}(i), \vec{x}(i) \rangle \rightarrow \max \end{cases}$$

, a  $\{ \vec{p}(i), \hat{e}(i) \}$  экв. реш. з.п.н.

$$(8) \begin{cases} z(i) \rightarrow \min \\ \vec{p}(i) = A^* \vec{p}(i) + z(i) \vec{b}(i) + \hat{S} \vec{c}(i) \\ \vec{p}(i) \vec{K}(i) \geq H(i) \\ z(i) \geq 0 \end{cases}$$

8, 4 Вуенка новых технологий

одна и та же пр. - разн. техн

$n$  - видов <sup>продуктов и т. технологий</sup>

$0 \leq G$  - матрица  $(n \times m)$  выпусков

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) \geq 0$  - вектор интенсивности  
использ. технологий

$G\vec{x}$  - вектор выпусков

$A \geq 0$  - matr  $(n \times m)$  прямых затрат

$A\vec{x}$  - вектор производственных затрат

$0 \leq \vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$  - вектор трудовых затрат

$0 \leq \vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$  - вектор фондоемкости

$\pi w \rightarrow \max$

$$G\vec{x} \geq A\vec{x} + w\vec{K} \quad \vec{p} \geq 0$$

$$\vec{c}\vec{x} \leq R \quad S \geq 0$$

$$v\vec{x} \leq P \quad T \geq 0$$

$$w \geq 0, \vec{x} \geq 0$$

$(\vec{g}_n, \vec{a}_n, \vec{c}_n, \vec{v}_n)$  - новая технология.

$\pi \omega \rightarrow \max$

$$G\vec{x} + x_n \vec{g}_n \geq A\vec{x} + x_n \vec{a}_n + \omega \vec{K}$$

$$\vec{c}\vec{x} + c_n x_n \leq R$$

$$v\vec{x} + v_n x_n \leq P$$

$$\omega \geq 0, \vec{x} \geq 0, x_n \geq 0$$

Вид. Будем говорить, что новая технология  $(\vec{g}_n, \vec{a}_n, c_n, b_n)$  неэффективна, если оптимальные значения функционалов в з.п.н. (I) и з.п.н. (II) равны.

$$\begin{aligned} L(\vec{x}, \omega, \vec{p}, s, z) &= H\omega + (\vec{p}, G\vec{x} - A\vec{x} - \omega\vec{K}) + \\ &+ s(K - \vec{C}\vec{x}) + z(P - \vec{b}\vec{x}) = \\ &= sK + zP + (\vec{x}, G^*\vec{p} - A^*\vec{p} - s\vec{C} - z\vec{b}) + \\ &+ \omega(A - \vec{K}\vec{p}). \end{aligned}$$

$$(III) \begin{cases} sK + zP \rightarrow \min \\ G^*\vec{p} \leq A^*\vec{p} + s\vec{C} + z\vec{b} \\ \vec{p}\vec{K} \geq A \\ \vec{p} \geq 0, s \geq 0, z \geq 0 \end{cases}$$

### Предложение 3

Для того, чтобы новая технология  $(\vec{g}_n, \vec{a}_n, c_n, b_n)$  была неэффективна необход. и достаточно, чтобы существовало решение з.п.н. (III) такое, что

$$\vec{p}\vec{g}_n \leq \vec{p}\vec{a}_n + sc_n + zb_n \quad (4)$$

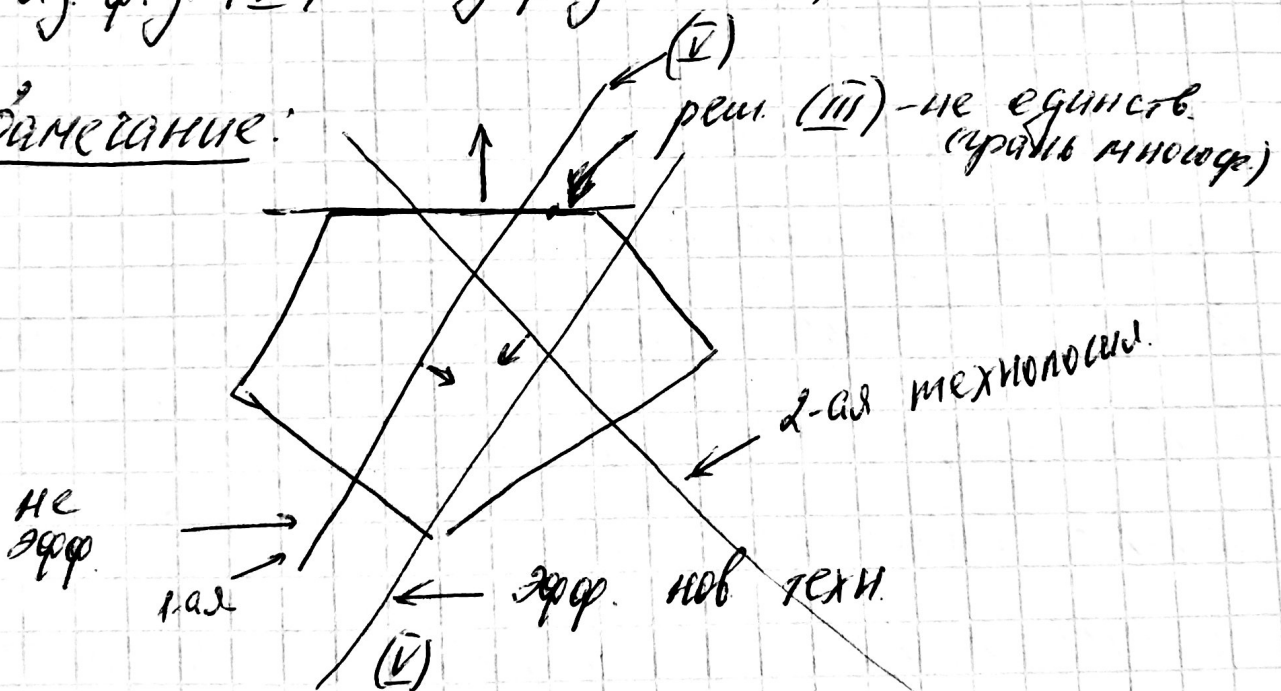


Док. 60

$$\begin{aligned}
 & SK + \varepsilon T \rightarrow \min \\
 (\bar{V}) \quad & \begin{cases} G^* \vec{p} = A^* \vec{p} + s\vec{c} + \varepsilon \vec{b} \\ \vec{p} \vec{g}_H = \vec{a}_H \vec{p} + s\vec{c}_H + \varepsilon \vec{b}_H \\ \vec{p} \cdot \vec{k} \geq H \\ \vec{p} \geq 0, s \geq 0, \varepsilon \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

отв. на 1. ф-ла 1. гв.  
 0. ф. ф. л. н. (I) = 0. ф. ф. л. н. (III)  
 // def 1. гв.  
 0. ф. ф. (II) = 0. ф. ф. л. н. (V)

Замечание:



→ 2-аре (1,2) - технол. эффективна,  
 а по отдельности - нет!

# §5 Экономическая интерпретация

## принципа максимума. (ПМП)

в моделях Экономического экономического  
рынка.

$\vec{z}(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$  - вектор мощностей  
в период времени  $t$   
 $\vec{x}(t) \leq \vec{z}(t)$

$\vec{v}(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))$  - вектор прироста мощностей  
в период времени  $t$ .

$$\vec{z}(t+1) = \vec{z}(t) + \vec{v}(t)$$

$B \geq 0$  - матрица  $(n \times m)$

- приростных конденсаторов

$B \cdot \vec{v}(t)$  - вектор затрат на создание новых  
мощностей  
 $0 \leq A$  - матрица  $(n \times n)$  прямых  
затрат.

$$\begin{cases} \vec{x}(t) \geq A \vec{x}(t) + B \vec{v}(t) + c(t) \vec{K} \\ \vec{c} \vec{x}(t) \leq R(t) \{ s(t) \geq 0 \} (t=0, 1, \dots, T-1) \\ \vec{x}(t) \leq \vec{z}(t) \{ \vec{z}(t) \geq 0 \} \\ \vec{z}(t+1) = \vec{z}(t) + \vec{v}(t) \{ \vec{u}(t+1) \} \\ \vec{z}(0) = \vec{z}_0 > 0, \vec{z}(T) = \vec{z}_T \{ \vec{u}_t \geq 0 \text{ как } \vec{u}_0 \text{ вкл. оставим } \vec{u}_t \text{ как } \vec{u}_0 \} \\ \vec{x}(t) \geq 0, c(t) \geq 0, \vec{v}(t) \geq 0, \vec{z}(t) \geq 0 \end{cases}$$

Р-ал.

$$\sum_{t=0}^{T-1} M(t) c(t) \rightarrow \max$$

$T$  - конец  
счета.

$H(t) = \delta^t$  предполож. погр в след моменты бр.  
 $0 < \delta < 1$  - коэф. дисконтирования

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{L}(\{\bar{x}(t), \omega(t), \bar{v}(t), \bar{z}(t) \mid t=0, 1, \dots, T-1, \bar{z}(T), \\
 & \{\bar{p}(t), s(t), \bar{x}(t), \bar{u}(t) \mid t=0, \dots, T-1, \bar{u}(T), \bar{u}_T\}) = \\
 & = \sum_{t=0}^{T-1} \{ H(t) \omega(t) + (\bar{p}(t), \bar{x}(t) - A\bar{x}(t) + \omega(t)R - \\
 & - B\bar{v}(t) + s(t) \cdot (R - C \cdot \bar{x}(t)) + (\bar{z}(t), \bar{z}(t) - \bar{x}(t)) + \\
 & + (\bar{u}(t+1), \bar{z}(t) + \bar{v}(t) - \bar{z}(t+1)) \} + \\
 & + (\bar{u}(0), \bar{z}_0 - \bar{z}(0)) + (\bar{u}_T, \bar{z}(T) - \bar{z}_T) = \\
 & = \bar{u}(0) \bar{z}_0 - \bar{u}_T \bar{z}_T + \sum_{t=0}^{T-1} s(t) R(t) + \\
 & + \sum_{t=0}^{T-1} \{ (\bar{x}(t), \bar{p}(t) - A^* \bar{p}(t) - s(t)C - \bar{z}(t)) + \\
 & + \omega(t) (H(t) - \bar{p}(t)R) + (\bar{v}(t), \bar{u}(t+1) - B^* \bar{p}(t)) \\
 & + (\bar{z}(t), \bar{u}(t+1) + \bar{z}(t) - \bar{u}(t)) \} + (\bar{z}(T), \bar{u}_T - \bar{u}(T))
 \end{aligned}$$

$$\bar{u}(0) \bar{e}_0 - \bar{u}_T \bar{e}_T + \sum_{t=0}^{T-1} S(t) R(t) \rightarrow \min$$

$$\bar{p}(t) = A^* \bar{p}(t+1) - S(t) \bar{c} - \bar{e}(t) \quad t=0, \dots, T-1$$

$$\bar{p}(t) \bar{r} \geq S(t)$$

$$(II) \quad B^* \bar{p}(t) \geq \bar{u}(t+1)$$

$$\bar{u}(t) = \bar{u}(t+1) + \bar{e}(t)$$

$$\bar{u}(T) = \bar{u}_T$$

$$\bar{p}(t) \geq 0, S(t) \geq 0, \bar{e}(t) \geq 0, \bar{u}_T \geq 0$$

Условия неотрицательности:

$$(\bar{p}(t), \bar{x}(t) - A\bar{x}(t+1) - B\bar{e}(t) - \omega(t)\bar{r} = 0 \quad t=0, \dots, T-1) \quad (3t)$$

$$S(t) (R(t) - \bar{c}^* \bar{x}(t)) = 0 \quad (4t)$$

$$(\bar{e}(t), \bar{r}(t) - \bar{x}(t)) = 0 \quad (5t)$$

$$(\bar{u}_T, \bar{e}(T) - \bar{e}_T) = 0 \quad (6)$$

$$\omega(t) (A(t) - \bar{p}(t) \bar{r}) = 0 \quad (7t)$$

$$(\bar{e}(t), \bar{u}(t+1) - B^* \bar{p}(t)) = 0 \quad (8t)$$

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_T + \sum_{t=1}^{T-1} \bar{e}(t) \quad \text{— вектор стоимостей мощностей}$$



#### Прегласнение 4

Асисте  $\{\hat{x}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\theta}(t), \hat{f}(t) \mid t=0, \dots, T-1, \hat{x}(T)\}$   
 авл. раш. з.п.п. (I)

$\{\hat{p}(t), \hat{s}(t), \hat{e}(t), \hat{\mu}(t) \mid t=0, \dots, T-1, \hat{x}(T), \hat{\mu}_T\}$   
 раш. з.п.п. (II), ~~0 ≤ t ≤ T-1~~  $0 \leq t \leq T-1$ .

Тогда  $(\hat{x}(t), \hat{\omega}(t), \hat{\theta}(t))$  авл. раш. з.п.п.

$$(9) \begin{cases} A(t)\omega(t) + (\hat{x}(t+1), \hat{\theta}(t)) \rightarrow \min \\ \bar{x}(t) \geq A\bar{x}(t) + B\bar{\theta}(t) + \omega(t)\bar{c} & \bar{p}(t) \\ \bar{c}\bar{x}(t) \leq K(t) & \begin{cases} s(t) \geq 0 \\ \bar{x}(t) \leq \hat{x}(t) & \begin{cases} \bar{e}(t) \geq 0 \end{cases} \end{cases} \\ \bar{x}(t) \geq 0, \omega(t) \geq 0, \bar{\theta}(t) \geq 0 \end{cases}$$

не существенно

и  $(\hat{p}(t), \hat{s}(t), \hat{e}(t))$  авл. решением з.п.п.

$$(10) \begin{cases} s(t)K(t) + \bar{e}(t)\hat{x}(t) \rightarrow \min \\ \bar{p}(t) - A^* \bar{p}(t) + s(t)\bar{c} = \bar{e}(t) \\ \bar{p}(t)\bar{c} \geq A(t) \\ B^* \bar{p}(t) \geq \hat{\mu}(t+1) \\ \bar{\mu}(t) \geq 0, \bar{s}(t) \geq 0, \bar{e}(t) \geq 0 \end{cases}$$

Дир.  
 Удостовер  
 в  
 гласность  
 задачи

# Глава 3

Элемент финансовой математики

§1 Модель Кокса - Росса - Рубинштейна

$$t = 0, 1, \dots, T$$

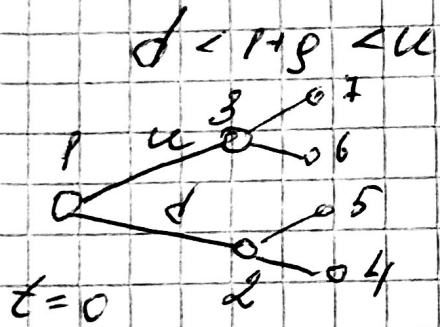
(1+r)

доходность безрискового актива

$$d < u$$

акции

$$L = 1$$

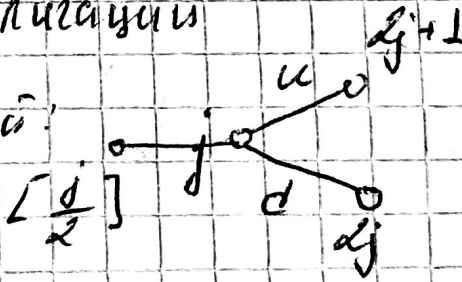


$\{2^T, 2^{T+1}, \dots, 2^{T+1} - 1\}$  - терминальные состояния.

$S_t(j)$  - цена акции в состоянии  $j$  - стоимость

$S_0(1) = 1$  - куп. во облигаций

Нумерация состояний:



$\tau(j) = \lceil \log_2 j \rceil$  - период времени в котором находится сост.

$j = \{ \text{в двоичной записи} \} = 1010011 \dots 1$

$K(j)$  - число периодов времени, в которые цена акции умножалась на  $u$  (число нулей)

$$S_1(j) \cdot \frac{1}{P(j)} \cdot \frac{Z(j) - K(j)}{1}$$

- цена акции в сост. финансов. рынка  $j$ .

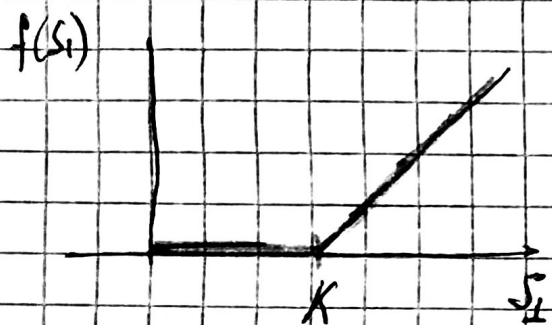
/Ф-ция платежа/ -  $f(S_1)$   
по деривативу.

Пример:

1) <sup>оп</sup> ~~опцион~~ на <sup>покупку</sup> ~~продажу~~ ("call")

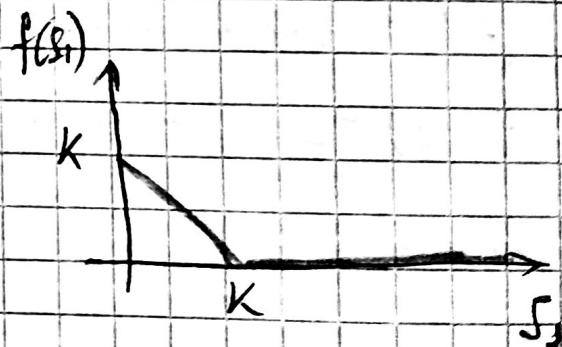
$f(S_1) = (S_1 - K)_+$  - право купить по цене  $K$  акцию

$$(S_1 - K)_+ = \begin{cases} S_1 - K, & S_1 \geq K \\ 0, & \text{если } S_1 < K \end{cases}$$



2) ~~опцион~~ на <sup>продажу</sup> ~~покупку~~

$$f(S_1) = (K - S_1)_+$$



3) опцион "сигласс"

$$f(S_1) = |S_1 - K| = (S_1 - K)_+ + (K - S_1)_+$$

$(Z_0(j), Z_1(j))$  - портфель в состоянии  $0$ , рынка  $j$ , в котором  $Z_0(j)$  - число

безрисковых бумаг (облигаций),  $Z_1(j)$  - число акций в портфеле

$\{f_0(j), f_1(j) \mid 1 \leq j \leq 2^T - 1\}$  - финансовая стратегия.

Условие самофинансирования

$$S_0(j) f_0(j) + S_1(j) f_1(j) = S_0(j) f_0\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) + S_1(j) f_1\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) \quad (2 \leq j \leq 2^T - 1)$$

$$S_0(j) f_0\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) + S_1(j) f_1\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) \geq f(S_1(j)) \quad (2^T \leq j \leq 2^{T+1} - 1)$$

сравнительная цена опциона

$$(1) \begin{cases} S_0(1) f_0(1) + S_1(1) f_1(1) \rightarrow \min \\ S_0(j) f_0(j) + \tilde{p}(j) S_1(j) = S_0(j) f_0\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) + S_1(j) f_1\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) \quad (2 \leq j \leq 2^T - 1) \\ S_0(j) f_0\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) + S_1(j) f_1\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) \geq f(S_1(j)) \quad (2^T \leq j \leq 2^{T+1} - 1) \end{cases}$$

$$1 < \beta < 1 + \rho < 4$$

$$\frac{S_0(2j)}{S_0(j)} = \frac{S_0(2^{j+1})}{S_0(j)} = 1 + \rho$$

$$\frac{S_1(2j)}{S_1(j)} = \beta, \quad \frac{S_1(2^{j+1})}{S_1(j)} = 4$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\{f_0(j), f_1(j) \mid 1 \leq j \leq 2^T - 1\}, \{\tilde{p}(j) \mid 2 \leq j \leq 2^{T+1} - 1\}) = \\ & = S_0(1) f_0(1) + S_1(1) f_1(1) + \sum_{j=2}^{2^T-1} \tilde{p}(j) (S_0(j) f_0\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) - S_1(j) f_1\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right)) + \\ & + S_0(2^T) f_0(2^T) + S_1(2^T) f_1(2^T) + \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) (S_0(j) f_0\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right) - S_1(j) f_1\left(\left\lceil \frac{j}{2} \right\rceil\right)) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - s_0(j) \cdot \left( \left[ \frac{j}{2} \right] \right) - s_1(j) \cdot \left( \left[ \frac{j}{2} \right] \right) = \\
& = \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) \cdot (f(s(j)) - \tilde{p}(j) \cdot s_0(j) - \tilde{p}(j) \cdot s_1(j)) \\
& \quad + s_0(1) (s_0(1) - \tilde{p}(2) \cdot s_0(2) - \tilde{p}(3) \cdot s_0(3)) + \\
& \quad + s_1(1) (s_1(1) - \tilde{p}(2) \cdot s_1(2) - \tilde{p}(3) \cdot s_1(3)) + \\
& \quad + \sum_{j=2}^{2^T-1} \{ s_0(j) (\tilde{p}(j) s_0(j) - \tilde{p}(2j) s_0(2j) - \tilde{p}(2j+1) s_0(2j+1)) \\
& \quad + s_1(j) (\tilde{p}(j) s_1(j) - \tilde{p}(2j) s_1(2j) - \tilde{p}(2j+1) s_1(2j+1)) \}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rightarrow \sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \tilde{p}(j) f(s(j)) \rightarrow \max \\
& \left\{ \begin{aligned}
& \tilde{p}(2) \cdot s_0(2) + \tilde{p}(3) \cdot s_0(3) = s_0(1) \\
& \tilde{p}(2) s_1(2) + \tilde{p}(3) s_1(3) = s_1(1) \\
& \tilde{p}(2j) s_0(2j) + \tilde{p}(2j+1) s_0(2j+1) = \tilde{p}(j) s_0(j) \\
& \tilde{p}(2j) s_1(2j) + \tilde{p}(2j+1) s_1(2j+1) = \tilde{p}(j) s_1(j) \\
& \tilde{p}(j) \geq 0, \quad 2^T \leq j \leq 2^{T+1}-1
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} \bar{p}(j) f(s(j)) \rightarrow \max$$

$$\bar{p}(2) (1+g) + \bar{p}(3) (1+g) = 1$$

$$\bar{p}(2) d + \bar{p}(3) u = 1$$

$$\bar{p}(2j) (1+g) + \bar{p}(2j+1) (1+g) = \bar{p}(j)$$

$$\bar{p}(2j) d + \bar{p}(2j+1) u = \bar{p}(j)$$

$$p(j) \geq 0, 2^T \leq j \leq 2^{T+1} - 1$$

$$2^T \leq j \leq 2^{T+1} - 1$$

Условия опт. неизвестности:

$$\tilde{p}(j) (f(s(j)) - s_0(j) g_0(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor) - s_1(j) g_1(\lfloor \frac{j}{2} \rfloor)) = 0 \quad (3)$$

$$\bar{p}(2) = \frac{u - (1+g)}{u - d} \cdot \frac{1}{1+g}$$

$$\bar{p}(3) = \frac{(1+g) - d}{u - d} \cdot \frac{1}{1+g}$$

$$\bar{p}(2j) = \frac{u - (1+g)}{(u - d)} \cdot \frac{1}{1+g} \cdot \tilde{p}(j)$$

$$\bar{p}(2j+1) = \frac{(1+g) - d}{u - d} \cdot \frac{1}{1+g} \cdot \tilde{p}(j)$$

— переверну!

← равно

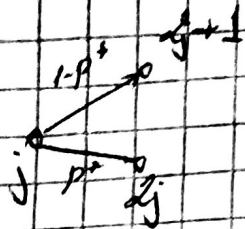
$$\bar{p}(j) = (1+g)^{-\tau(j)} p(j) \quad p^* = \frac{u - (1+g)}{u - d}$$

$$p(2) = p^*, p(3) = 1 - p^*$$

$$p(2j) = p^* p(j) \quad ; \quad p(2j+1) = (1 - p^*) p(j)$$

$$\sum_{j=2^T}^{2^{T+1}-1} p(j) = 1$$

$$s(j) = \text{const}$$



$p(j)$  - вероятность нахождения в состоянии  $j$

Формула Кокса-Росса-Френкштейна.

Оптимальное значение  $\varphi$ -ала в з.п.и. (I) (скупившаяся цена опциона с платёжной

$\varphi$ -чей  $f(x_i)$  равно  $(1+p)^{-T} \sum_{k=0}^T c_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k}$ .

где  $p^* = \frac{u - (1+p)}{u - d}$

$y(j) = (1+p)^{-z(j)} (\pi_0(j) S_0(j) + \pi_1(j) S_1(j)) = ?$

- стоимость портфеля (Мартингал)

$= p^* y(j) + (1-p^*) y(j+1)$

$p^* (1+p)^{-z(j)-1} (\pi_0(j) S_0(j) (1+p) + \pi_1(j) S_1(j) d) +$

$+ (1-p^*) (1+p)^{-z(j)-1} (\pi_0(j) S_0(j) (1+p) + \pi_1(j) S_1(j) u) =$

$= \pi_0(j) S_0(j) (1+p)^{-z(j)} + \pi_1(j) S_1(j) (1+p)^{-z(j)} \left( p^* \frac{d}{1+p} + \right.$

$\left. + (1-p^*) \frac{u}{1+p} \right)$

$\Rightarrow$  Действ. стоимость портф. явл. мартингалом.

$$1.1. \quad \frac{d}{1+s} - \frac{u-(1+s)}{u-d} + \frac{(1+s)-d}{u-d} \cdot \frac{u}{1+s} = 1.$$

Предположение:  $f(s)$  - выпуклая функция.

Тогда минимальная сумма денег, <sup>(ин)</sup>необходимая для формирования <sup>(ин)</sup>инвестиционной стратегии, удовл. усл. самофинансирования и гарантированно выполняющих <sup>(обл)</sup>обязательства по платежу  $f(s)$ , равна

$$(1+s)^{-T} \sum_{k=0}^T C_T^k (p^*)^k (1-p^*)^{T-k} f(s_1 d^k u^{T-k})$$

$$, \text{ где } p^* = \frac{u-(1+s)}{u-d}.$$

Док-во:

$$t = 0, 1, \dots, T$$

$[d^t s(1), u^t s(1)]$  - инт. для ценн. оп.  $W(s, t)$

$W(s, t)$  - мин. сумма денег, <sup>(ин)</sup>нужна для <sup>(ин)</sup>сформ. страт. при цене сейчас  $s$ .

$W(s, T) = f(s)$  - выпукл. ф-ция

$\{t-1, s_1\} \rightarrow$  куда?

$$[ds_1, us_1]$$

$$\begin{cases} (1+s)z_0 + d s_1 z_1 = W(ds_1, t) \\ (1+s)z_0 + u s_1 z_1 = W(us_1, t) \end{cases} \Rightarrow$$



$$\left. \begin{aligned} j_1 &= \frac{W(uS_1, \tau) - W(dS_1, \tau)}{S_1 (u-d)} \\ j_0 &= \frac{uW(dS_1, \tau) - dW(uS_1, \tau)}{(u-d)(1-p)} \end{aligned} \right\}$$

Вот так  
получен  
с помощью  
интерполяции

$$1 \in [d, u]$$

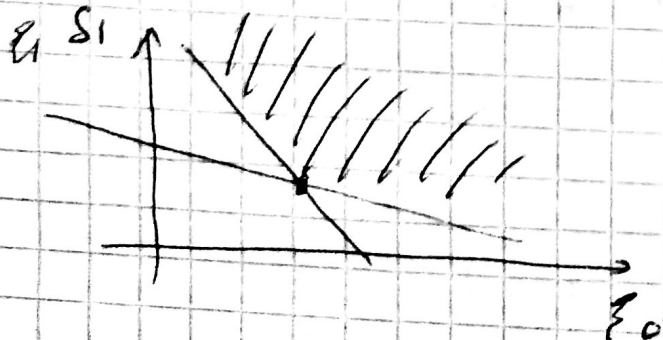
$$\begin{aligned} (1-p)j_0 + 1 \cdot S_1 j_1 &= \frac{uW(dS_1, \tau) - dW(uS_1, \tau)}{u-d} + \\ &+ 1 \cdot \frac{W(uS_1, \tau) - W(dS_1, \tau)}{(u-d)} = \\ &= \frac{u-d}{u-d} W(uS_1, \tau) + \frac{u-d}{u-d} W(dS_1, \tau) \geq \\ &\geq W\left(\left(\frac{u-d}{u-d} u + \frac{u-d}{u-d} d\right) S_1, \tau\right) = W(1 \cdot S_1, \tau) \end{aligned}$$

Меньшей стоимостью облигации не будет

$$W/S_1, \tau - 1 = j_0 + j_1 \cdot S_1$$

] Определим задачу.  $(\xi_0, \xi_1)$

$$\begin{cases} (1-p)\xi_0 + d\xi_1 \geq W(d, S_1) \\ (1-p)\xi_0 + u\xi_1 \geq W(u, S_1) \\ \xi_0 + S_1 \xi_1 \rightarrow \min \end{cases}$$



## §2 Модель Блэка-Шоулса

$$t_0, T, N$$

$$0, \frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \dots, T$$

$S$  - курс дохода облигаций

$$S = \frac{2T}{N}, \quad d = e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}, \quad u = e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}$$

$$p^* = \frac{u - (1 + S)}{u - d} = \frac{e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - \frac{2T}{N}}{e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}} - e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}}}}$$

цена опц

$$C_N = (1 + \frac{2T}{N})^{-N} \sum_{k=0}^N C_N^k (p^*)^k (1 - p^*)^{N-k}$$

$$f(S) e^{-\sigma \sqrt{\frac{T}{N}} k} e^{\sigma \sqrt{\frac{T}{N}} (N-k)}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = ?$$

$N \rightarrow \infty$

Предположение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \frac{e^{-2T}}{\sqrt{2\pi} \sqrt{T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(S) e^{-\sigma \sqrt{T} y + 2T - \frac{\sigma^2}{2} T} dy$$

$$e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Док-во (намне стало лемма писателю)

(просто по выпр.)

$$p^* = \frac{1 - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \sqrt{\frac{T}{N}} + o(\frac{1}{\sqrt{N}})}{2 + o(\frac{1}{\sqrt{N}})}$$

$$1-p^* = \frac{1 + (\frac{2}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}) \sqrt{\frac{1}{N}} + o(\frac{1}{\sqrt{N}})}{2 + o(\frac{1}{\sqrt{N}})}$$

$$f(s) \in (N - \sqrt{N}) o(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

$$x_1, \dots, x_N$$

$$x_i = \begin{cases} -1, & \text{с вер } p^* \\ 1, & \text{с вер } 1-p^* \end{cases}$$

$$J_N = x_1 + \dots + x_N$$

$$\sigma_N^2 = N(1 - (1 - 2p^*)^2)$$

$$M_N = N(1 - 2p^*)$$

$$\frac{J_N - M_N}{\sigma_N} \text{ слабо сход к норм. распре. сл. вел.}$$

с дисперсией 1 и математическим 0

(GITT)

$f(s)$  - непер. осп. ф-ция

$$y = \frac{J_N - M_N}{\sigma_N} \omega$$

$$J_N = \sigma_N y + M_N = \sqrt{N} \sqrt{1 - (1 - 2p)^2} y + N(1 - 2p)$$

$$1 - 2p^* = (\frac{2}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}) \sqrt{\frac{1}{N}} + o(\frac{1}{\sqrt{N}})$$

$$J_N = \sqrt{N} y + (\frac{2}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}) \sqrt{N} + o(\sqrt{N})$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_N = e^{-\frac{\sigma^2}{2} T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-\frac{\sigma^2}{2} T y + (\frac{2}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}) T} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = u(s, T)$$

$$u(s, t)$$

Предложение: Связность платежного обязательства  
с платежн. ф-цией  $f(s)$  и времени  
до погашения  $t$

$$\text{т.е. } \frac{\partial u(s, t)}{\partial s} + \frac{1}{2\sigma^2 s} \frac{\partial^2 u(s, t)}{\partial s^2} - ru(s, t) = \frac{\partial u(s, t)}{\partial t}$$

с н.у.с.  $u(s, 0) = f(s)$

б, в

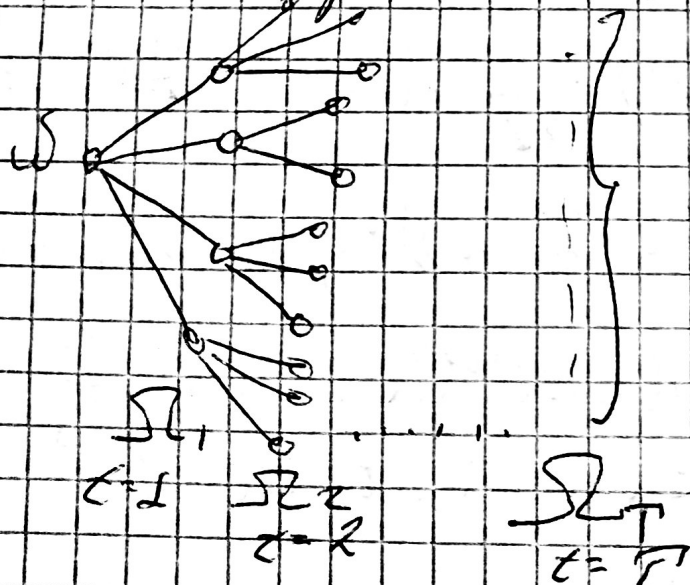
Теория арбитража

$$t = 0, 1, \dots, T \quad i \in I, \quad |I| < \infty$$

$(1+r)$  - облигация

$S_i(\omega)$  - цена акции  $i$ -ого типа в сост.

финансового рынка  $\mathcal{F}$ .



$$P: \Omega_t \rightarrow \Omega_{t-1} \quad (t=1, \dots, T)$$

$\{s, S_i(\omega) \mid i \in I, \omega \in \Omega_t, t=0, 1, \dots, T\}$  - описание финансового рынка



$\{f_0(\omega), f_i(\omega) \mid i \in I, \omega \in \Omega_t, t=0,1,\dots,T-1\}$  - финансов. ситуации стратегий

$f_0(\omega)$  - облигации в сост. фин. рынка

$f_i(\omega)$  - акции  $i$ -го типа в сост. рынка  $\omega$ .

Впр. Будем говорить, что финансов рынок

$\{g, S_i(\omega) \mid i \in I, \omega \in \Omega_t, t=0,1,\dots,T\}$

допускает арбитраж, если  $\exists$  финансовая стратегия  $\{f_0(\omega), f_i(\omega) \mid i \in I, \omega \in \Omega_t, t=0,1,\dots,T-1\}$

покажем, что

$$f_0(\omega) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) f_i(\omega) \leq 0 \quad \omega \in \Omega_0$$

$$f_0(\omega) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) f_i(\omega) = (1+g)f_0(\mathcal{P}_t(\omega)) +$$

$$+ \sum_{i \in I} S_i(\omega) f_i(\mathcal{P}_t(\omega))$$

$$\omega \in \Omega_t, t=1,\dots,T-1$$

$$(1+g)f_0(\mathcal{P}_T(\omega)) + \sum_{i \in I} S_i(\omega) f_i(\mathcal{P}_T(\omega)) \geq 0$$

$$\exists \hat{\omega} \in \Omega_T : (1+g)f_0(\mathcal{P}_T(\hat{\omega})) + \sum_{i \in I} S_i(\hat{\omega}) f_i(\mathcal{P}_T(\hat{\omega})) > 0$$

Первая фундамент. теорема  
формирования цен финансовых  
активов.

Для того, чтобы финансовый рынок  $\{g, S_i(\omega) \mid i \in I, \omega \in \Omega_t, t=0,1,\dots,T\}$  не

допускает арбитражных инвестиционных  
стратегий необходимо и достаточно,  
чтобы существовали

$\{p(\omega) > 0 \mid \omega \in \Sigma_t, t=0, 1, \dots, T\}$ . Также,

что

$$\sum_{\{\omega \mid P_t(\omega) = 1\}} p(\omega) = p(\emptyset)$$

$$\forall \emptyset \in \Sigma_{t-1}, t=1, 2, \dots, T$$

$$p(\omega_0) = 1, \text{ где } \omega_0 \in \Sigma_0$$

$$S_t(v) = \sum_{\{\omega \mid P_t(\omega) = v\}} \frac{S_t(\omega)}{1+\delta} \frac{p(\omega)}{p(\emptyset)},$$

$$\forall \emptyset \in \Sigma, \forall \emptyset \in \Sigma_{t-1}, t=1, \dots, T$$